

Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Приборостроение»

531.383 (07)
Л887

Лысов А.Н., Виниченко Н.Т., Лысова А.А.

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ
ЧАСТЬ 1
Учебное пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением
вузов по университетскому политехническому
образованию в качестве учебного пособия для
студентов высших учебных заведений, обучающихся
по специальности 160402 «Приборы и системы
ориентации, стабилизации и навигации»*

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2009

УДК 531.383 (075.8)
Л887

Одобрено
учебно-методической комиссией приборостроительного факультета

Рецензенты:
Л.А. Северов, В.С. Дмитриев

Лысов, А.Н.
Л887 **Прикладная теория гироскопов:** учебное пособие / А.Н. Лысов,
Н.Т. Виниченко, А.А. Лысова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ,
2009. – 254 с.

Изложена прикладная теория гироскопа в кардановом подвесе. Рассмотрены принцип работы, основные характеристики и погрешности giroприборов: наземный giroкомпас, giroширот, интегрирующий giroскоп, одноосный силовой и индикаторно-силовой giroстабилизатор, датчик угловой скорости, датчик угловой скорости и углового ускорения, интегратор линейных ускорений.

Приведена теория роторного вибрационного и динамически настраиваемого гироскопов. Рассмотрены схемы и принцип работы осциляторных, твердотельных, микромеханических, лазерных и волоконно-оптических гироскопов.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей: 16040265 – «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации», 20010165 – «Приборостроение», 16040365 – «Электрооборудование летательных аппаратов и направления» 20010062 – «Приборостроение».

Авторы выражают благодарность студентам Дрокину В.В., Цыкунову А.В., Щусю А.А. за помощь в оформлении пособия.

УДК 531.383 (075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Волчок, юла... древняя детская игрушка. Пока волчок неподвижен, он интересен лишь формой и расцветкой. Но стоит только раскрутить волчок относительно оси симметрии, как он «оживает». Ось вращения волчка устойчиво сохраняет свое положение при наклонах основания, толчках. Волчок оказывает энергичное сопротивление попытке изменить положение оси вращения. Эти удивительные свойства привлекали внимание не только детей, но и взрослых.

С одной стороны ученые пытались составить математическую модель волчка и решить задачу о движении твердого тела с одной неподвижной точкой. С другой стороны ученые и изобретатели пытались использовать свойства волчка в технике.

Объяснение причин необычного поведения быстровращающегося твердого тела стало возможным благодаря научным трудам члена Петербургской академии наук Л. Эйлера, которые стали основой механики движения твердого тела. Эйлер составил уравнения движения твердого тела с одной неподвижной точкой и в 1758 г. нашел решение уравнений для частного случая, когда центр масс твердого тела совпадает с неподвижной точкой (точкой опоры).

В 1788 г. французский математик Лагранж решил задачу вращения твердого тела (волчка), центр масс которого расположен выше точки опоры, но находится на оси вращения.

Задача в более общей постановке, когда центр масс находится в произвольной точке, была решена в 1888 г. С. Ковалевской.

Усилия ученых и изобретателей по использованию свойств волчка в технике тоже дали результат. Развитие мореходства требовало надежных средств для определения координат корабля и направления на север. В 1742 г. английский механик Серсон разработал искусственный горизонт. В этом приборе перевернутая металлическая чаша приводилась шнуром в быстрое вращение, а плоское дно чаши служило искусственным горизонтом, по отношению к которому измерялась высота светила.

Более совершенная конструкция искусственного горизонта была разработана в 1886 г. адмиралом Флерие. В этом приборе чаша раскручивалась струей сжатого воздуха до скорости 10 тысяч оборотов в минуту.

В 1852 году физик Л. Фуко описал созданный им прибор, названный гироскопом. В этом приборе ротор был установлен в карданов подвес с вертикальной осью наружной рамки. Фуко указал на три возможности использования гироскопа:

— если быстровращающийся ротор имеет три степени свободы, то его ось вращения сохраняет неизменную ориентацию в инерциальном пространстве, что позволяет с помощью такого прибора наблюдать вращение Земли;

— если внутреннюю рамку жестко связать с наружной так, чтобы ось ротора могла поворачиваться лишь в горизонтальной плоскости, то эта ось стремится установиться в плоскость меридиана;

— если наружную рамку жестко связать с корпусом, а внутренней рамке дать свободу вращения относительно ее оси и установить ось ротора в плоскость меридиана, то она стремится установиться параллельно оси вращения Земли.

Однако отчетливо подтвердить эти свойства гироскопа не удалось, так как на тот период развития техники невозможно было сделать опоры с малым моментом трения, и отсутствовал двигатель, который вращал бы ротор с большой скоростью.

Во второй половине 19 века в разных странах велись работы по созданию гироскопических приборов для практического применения на флоте. Усилиями ученых к концу 19 века были найдены все основные схемные и конструктивные решения для разработки гироскопического компаса. Это позволило промышленным предприятиям начать производство гироскопической техники. Так в 1908 г. был создан однороторный гирокомпас Аншютца-Кемпфе.

В начале 20 века наблюдается подъем промышленного производства, развитие транспорта, военной техники. Появилась необходимость в создании гироскопических приборов для систем управления подвижных объектов: кораблей, подводных лодок, торпед, самолетов, а во второй половине 20 века – ракет и космических аппаратов.

Таким образом, в 20 веке получила исключительное развитие прикладная гироскопия, которая включает в себя теоретические исследования ученых, проектно-конструкторские разработки и предприятия, нацеленные на создание гироскопических приборов и систем, осуществляющих навигацию подвижных объектов на воде, под водой, в воздушном пространстве и в космосе.

1. ГИРОСКОП. ПРИРОДА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

1.1. Гироскоп. Основные понятия и определения

Термин «*гироскоп*» появился в 1852 году. Французский физик Леон Фуко назвал так прибор, созданный им для обнаружения вращения Земли. В переводе с греческого гироскоп означает указатель вращения. *Гирос* – вращение, *скопео* – наблюдаю, вижу.

В технике под гироскопом понимают быстро вращающийся относительно оси симметрии ротор, одна из точек которого неподвижна.

Применяются различные способы крепления твердого тела в одной неподвижной точке, позволяющие ему свободно вращаться относительно этой точки [20]. Широко распространен внешний карданов подвес (рис. 1.1).

Быстро вращающийся относительно оси Oy ротор 1 укреплен во внутренней рамке 2, которая может вращаться вместе с ротором относительно оси Ox . Ось внутренней рамки вращается в опорах, расположенных на наружной (внешней) рамке 3. Наружная рамка может вращаться вместе с внутренней вокруг оси Oz относительно основания.

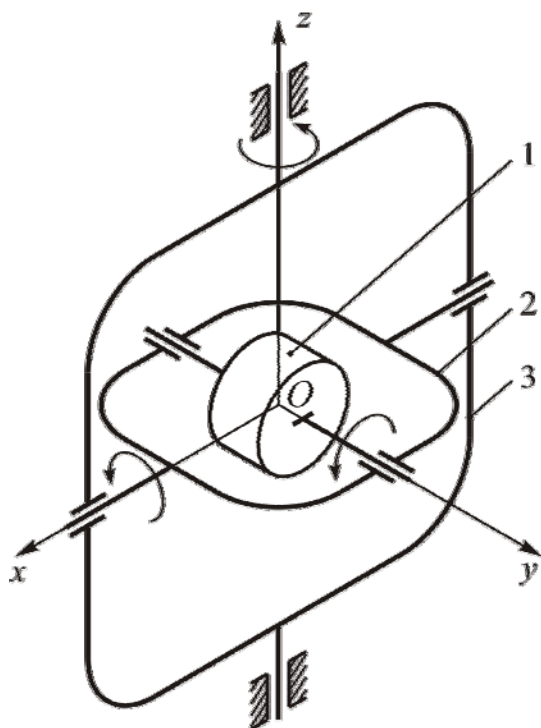


Рис. 1.1. Гироскоп с внешним кардановым подвесом ротора:
1 – ротор; 2 – внутренняя рамка; 3 – наружная рамка

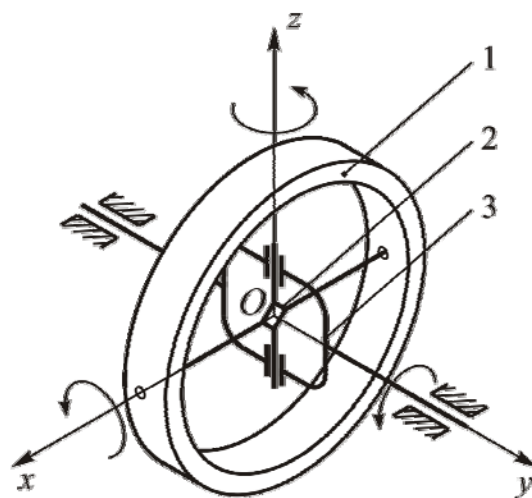


Рис. 1.2. Гироскоп с внутренним кардановым подвесом ротора:
1 – ротор; 2 – крестовина; 3 – рамка

Внутренняя и наружная рамки иногда выполняются в форме колец. Наряду с внешним применяется внутренний карданов подвес (рис. 1.2). Быстро вращающийся ротор 1 выполнен в форме кольца и может вращаться относительно оси Ox и вместе с крестовиной 2, укрепленной в рамке 3,

относительно оси Oz . Ротор, крестовина и рамка вращаются относительно оси Oy . Все три оси: Ox , Oy и Oz пересекаются в точке O , являющейся неподвижной точкой, относительно которой вращается ротор. Эта точка называется **точкой подвеса гироскопа**.

Ротор гироскопа может выполняться в виде сферы (рис. 1.3). Тогда вращение относительно одной неподвижной точки обеспечивается сферической аэродинамической опорой.

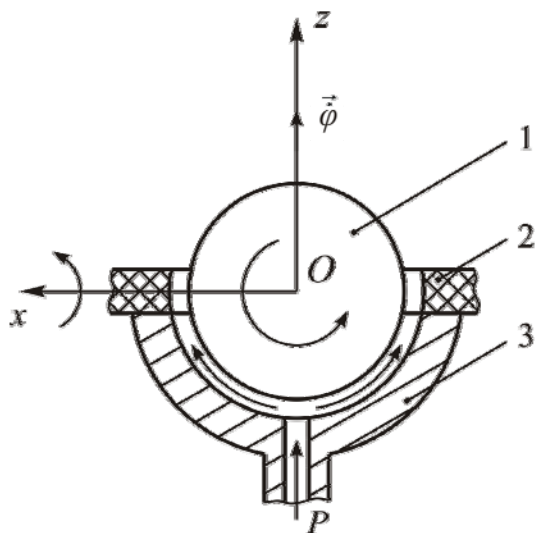


Рис. 1.3. Гироскоп с аэродинамическим подвесом:
1 – ротор; 2 – статор; 3 – чаша

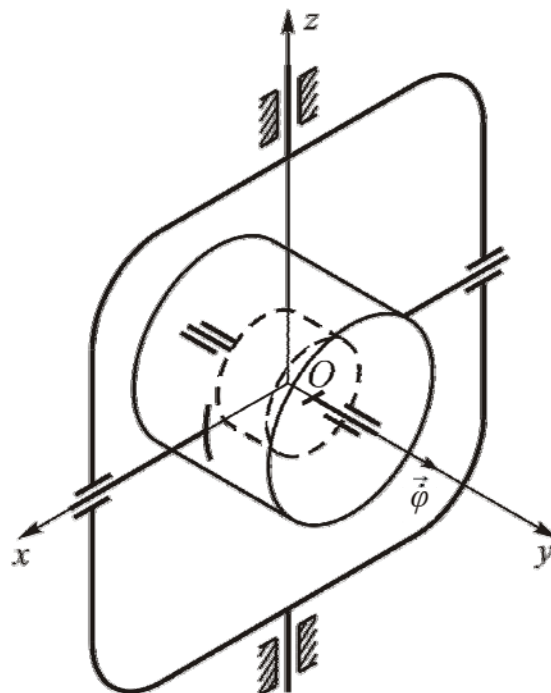


Рис. 1.4. Гироскоп с внутренней рамкой – гироскопом

В гироскопе с аэродинамическим подвесом, ротор 1 раскручивается полем статора 2 и поддерживается во взвешенном состоянии относительно чаши 3 аэродинамическими силами. Всплытие ротора в начальный момент осуществляется подачей сжатого воздуха под давлением P . После разгона ротора подача сжатого воздуха прекращается. Подвес сферического ротора осуществляется также с помощью электростатических и электромагнитных полей.

Обратимся к гироскопу с внешним кардановым подвесом (рис. 1.1). Карданов подвес обеспечивает ротору свободу вращения относительно трех осей. Вот почему такой гироскоп называют **трехстепенным**. Известно, что число степеней свободы определяется числом независимых параметров, задание которых однозначно определяет положение твердого тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени [5]. Для ротора 1 углы поворота вокруг осей Ox , Oy , Oz являются такими параметрами. При всех вращениях ротора и кардановых рамок, а также ось вращения ротора и ось внутренней рамки всегда остаются взаимоперпендикулярными. Угол между осью вращения ротора и осью внешней рамки может изменяться.

Если внешнюю рамку закрепить, то гироскоп станет **двухстепенным**. Если в гироскопе с тремя степенями свободы центр масс совпадает с точкой подвеса, то такой гироскоп называется **астатическим** или **уравновешенным**.

Трехстепенный гироскоп, по осям подвеса которого отсутствуют внешние моменты, называется **свободным**. В астатическом гироскопе, в первом приближении, его вращательное движение можно рассматривать независимо от поступательного вместе с точкой подвеса, так как момент сил инерции поступательного движения и момент реакции опоры относительно точки подвеса равны нулю независимо от их величины и направления.

Поступательное движение неуравновешенного гироскопа оказывает влияние на его вращательное движение.

Ось Oy , вокруг которой вращается ротор, называется главной осью гироскопа, или осью собственного вращения ротора.

Внутренняя рамка гироскопа часто выполняется в виде закрытой камеры, внутри которой помещается электрический двигатель, вращающий ротор, поэтому трехстепенный гироскоп часто будем изображать так, как показано на рисунке 1.4.

1.2. Видимые свойства гироскопа

Гироскоп обладает рядом специфических свойств, позволяющих широко использовать его в технике, особенно в различных навигационных системах.

Познакомимся со свойствами трехстепенного астатического гироскопа на лабораторной модели (рис. 1.5, а).

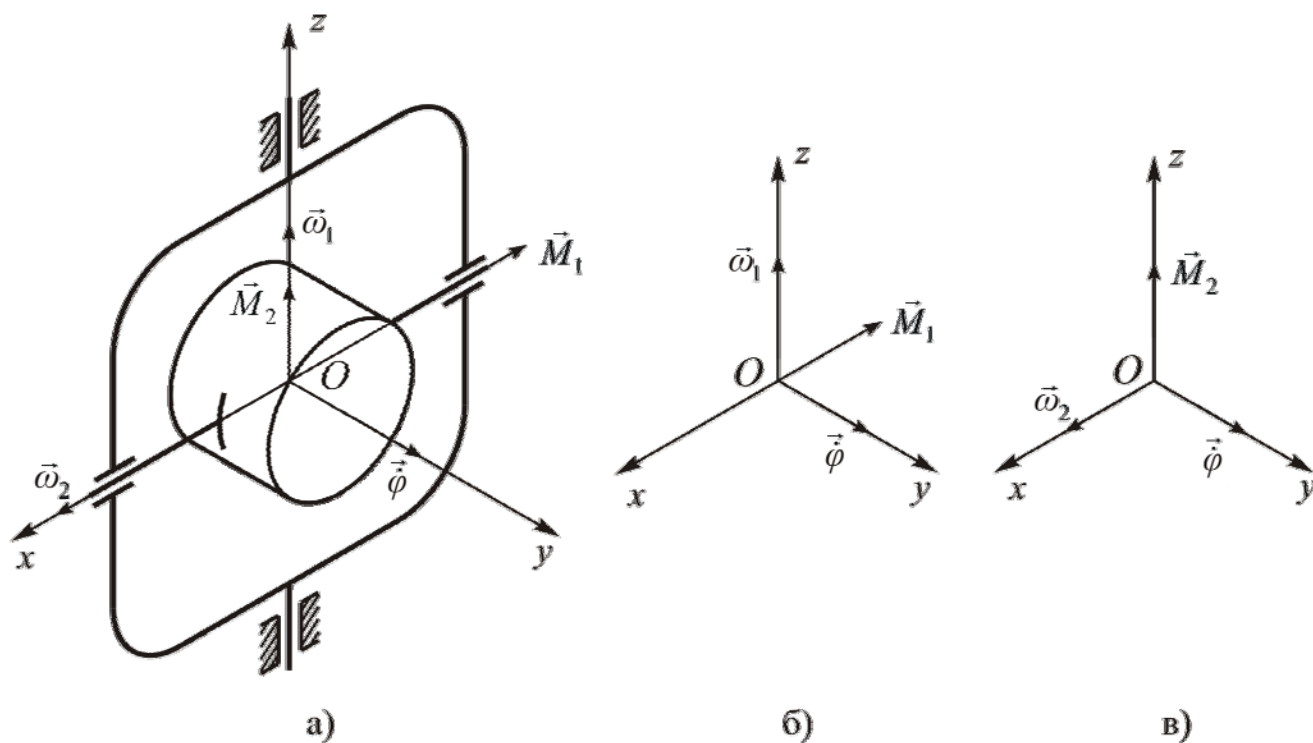


Рис. 1.5. Видимые свойства гироскопа

Пока ротор гироскопа не вращается ($\vec{\phi} = 0$), его поведение не отличается от обычного твердого тела. Поворот основания гироскопа вызывает изменение положения ротора под влиянием сил трения в опорах наружной рамки.

Момент, приложенный к какой-либо рамке карданова подвеса, вызывает поворот вокруг оси этой рамки. Удар по рамке вызывает вращение по направлению удара (рамка движется по инерции).

Сообщим ротору быстрое вращение относительно оси Oy с угловой скоростью $\vec{\phi}$. Как ведет себя гироскоп теперь? При повороте основания карданова подвеса ось ротора практически не меняет своего положения; удар по рамке гироскопа не производит видимого эффекта, не вызывает отклонения гироскопа от исходного положения. При внимательном наблюдении можно заметить, что удар по рамке вызывает колебания гироскопа с небольшой амплитудой. Эти колебания к тому же быстро затухают. Изменяется характер движения гироскопа под действием приложенного момента. Момент \vec{M}_1 , действующий по оси внутренней рамки, вызывает вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси внешней рамки. Момент \vec{M}_2 , приложенный к оси наружной рамки, вызывает вращение вокруг оси внутренней рамки со скоростью $\vec{\omega}_2$. Вращение гироскопа под действием внешнего момента происходит медленнее, чем соответствующее вращение рамок гироскопа при неподвижном роторе, вызванное таким же моментом. Наблюдаемое медленное вращение гироскопа под действием внешнего момента называется **прецессионным движением** или **прецессией гироскопа**. При изменении направления внешнего момента изменяется направление прецессии. Направление прецессии, при постоянном моменте, изменяется при изменении направления вектора угловой скорости ротора $\vec{\phi}$. Таким образом, быстровращающийся ротор, установленный в кардановом подвесе, оказывает сопротивление всякому усилию, стремящемуся изменить направление оси его вращения. Ротор всегда стремится сохранить плоскость вращения. Рассмотренные опыты показывают, что главная ось гироскопа сохраняет неизменным свое направление в инерциальном пространстве при отсутствии внешних моментов.

Наблюдения за гироскопом обнаруживают кажущиеся противоречия. Прецессия под действием внешнего момента происходит относительно оси, перпендикулярной вектору момента (см. рис. 1.5, б), в)). Следовательно, работа, совершаемая внешним моментом, равна нулю. Это противоречит закону сохранения энергии. Ведь прикладывая внешний момент к гироскопу, мы подводим кинетическую энергию; рамка прецессирует, приобретает определенную кинетическую энергию.

С другой стороны прецессия гироскопа кажется «безынерционной». Под действием внешнего момента прецессия начинается как бы мгновенно, без заметного переходного процесса и также мгновенно прекращается, если момент снимается. Однако кинетическая энергия не может изменяться мгновенно при приложении и снятии внешнего момента. Эти противоречия исчезнут, если предположить, что наряду с прецессией существует еще какое-то движение

гироскопа, не воспринимаемое простым наблюдением. На поддержание этого движения может расходоваться кинетическая энергия, подводимая к гироскопу.

1.3. Природа гироскопических явлений

Рассмотрим свойства гироскопа, обнаруженные на лабораторной модели. Пусть однородный ротор (рис. 1.6) совершает быстрое вращение относительно оси симметрии с угловой скоростью $\vec{\varphi}$, а главная ось, в свою очередь, вращается с переносной скоростью $\vec{\omega}$.

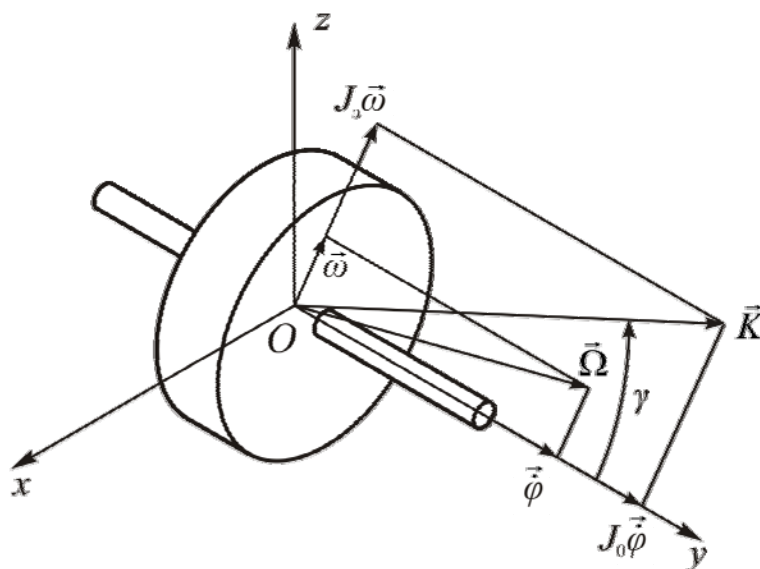


Рис. 1.6. Кинетический момент гироскопа

Абсолютная скорость вращения ротора равна геометрической сумме угловых скоростей $\vec{\Omega} = \vec{\varphi} + \vec{\omega}$.

Так как ось Oy – ось симметрии, то она является **главной осью инерции**. Момент инерции ротора J_0 относительно оси Oy называют **осевым** (аксиальным). Так как ротор является симметричным, то оси, лежащие в экваториальной плоскости, являются также главными осями инерции. Момент инерции ротора J_3 относительно оси, лежащей в экваториальной плоскости, называют **экваториальным**.

Сферическое движение ротора относительно неподвижной точки характеризуется кинетическим моментом (главным моментом количества движения):

$$\vec{K} = J_0 \vec{\varphi} + J_3 \vec{\omega}. \quad (1.1)$$

Вектор $J_0 \vec{\varphi}$ направлен по оси Oy ротора и называется **собственным кинетическим моментом гироскопа**; вектор $J_3 \vec{\omega}$ – **экваториальная составляющая кинетического момента гироскопа**.

Для современных гироскопических приборов угловая скорость $\dot{\varphi} = 600 \dots 6000 \text{ с}^{-1}$, в то время как угловая скорость оси ротора $\omega \ll \dot{\varphi}$. Также

весьма малым является угол γ между кинетическим моментом и главной осью гироскопа.

Поэтому в элементарной теории гироскопов пренебрегают экваториальной составляющей кинетического момента, т.е.

$$\vec{K} \approx J_0 \vec{\dot{\phi}} = \vec{H}, \quad (1.2)$$

где \vec{H} – собственный кинетический момент гироскопа.

Для угла γ можно записать

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{J_3 \omega}{J_0 \dot{\phi}}. \quad (1.3)$$

Пример. Определить угол γ отклонения вектора кинетического момента \vec{K} от главной оси гироскопа для следующих исходных данных:

$$\dot{\phi} = 2400 \text{ с}^{-1}; \quad \omega = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \quad J_3 = J_0.$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{2,4 \cdot 10^3} = 0,5 \cdot 10^{-6}; \quad \gamma = 0,1''.$$

Так как собственный кинетический момент \vec{H} совпадает с направлением главной оси гироскопа, то за положением главной оси можно следить по изменению положения вектора \vec{H} .

Для объяснения свойств гироскопа воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения, которая формулируется так: полная производная по времени вектора момента количества движения материальной системы, вычисленного относительно неподвижного центра, равна главному моменту всех внешних сил относительно того же центра.

Математически теорема об изменении кинетического момента записывается в виде:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}, \quad (1.4)$$

где \vec{M} – главный момент внешних сил, приложенных к гироскопу.

Производная по времени вектора \vec{H} представляет собой линейную скорость конца вектора кинетического момента, т.е. $\dot{\vec{H}} = \vec{U}$, следовательно:

$$\vec{U} = \vec{M}. \quad (1.5)$$

Запись в форме (1.5) носит название теоремы Резаля [26]: **линейная скорость конца вектора кинетического момента равна главному моменту внешних сил.**

В случае свободного гироскопа $\vec{M} = 0$. Уравнение (1.4) примет вид:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = 0. \quad (1.6)$$

Значит, $\vec{H} = \text{const}$, т.е. ось **главная ось свободного гироскопа сохраняет неизменным свое направление в инерциальном пространстве**. Это основное свойство гироскопа позволяет построить на подвижном объекте с помощью свободных гироскопов инерциальную систему координат и измерять относительно нее углы поворота объекта; оно широко используется при создании giroприборов.

Пусть ротор вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и поворачивается с угловой скоростью $\vec{\varphi}$ относительно оси Ox (рис. 1.7, а).

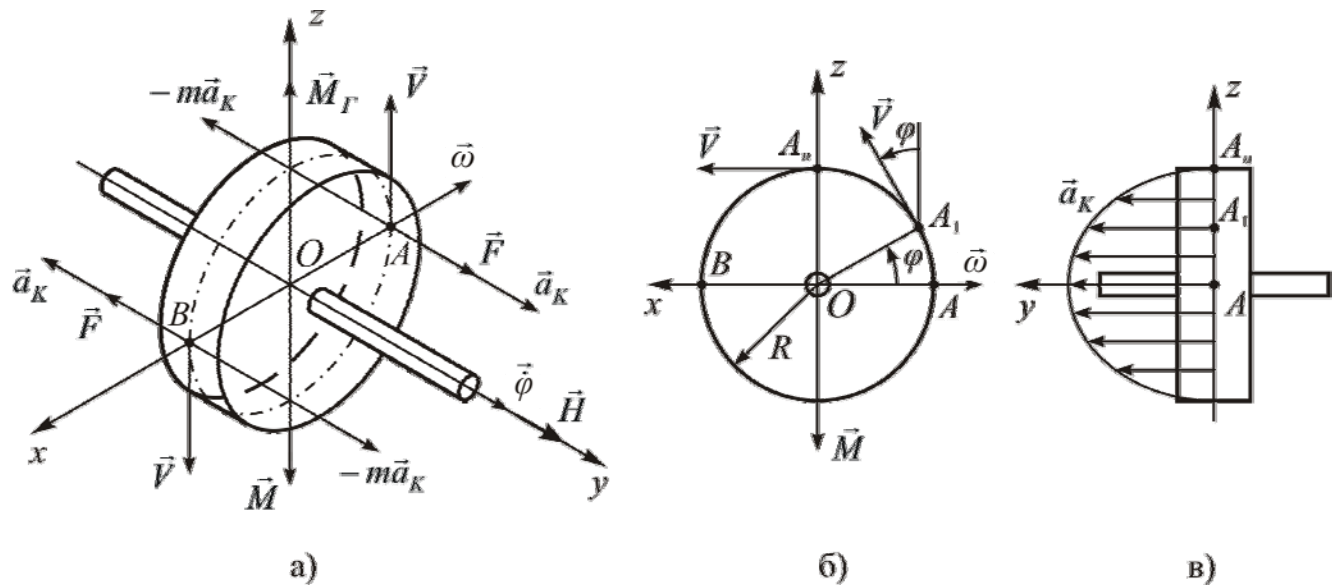


Рис. 1.7. Ускорение Кориолиса, скорость прецессии, гироскопический момент

Определим, чем может быть вызвано движение ротора с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Выделим в экваториальной плоскости и на ободу ротора материальные точки A и B . Из рисунка видно, что точка A ротора участвует в сложном движении. Она движется с относительной скоростью \vec{V} вместе с ротором, вращающимся с переносной скоростью $\vec{\omega}$. В таком случае точка A перемещается с ускорением Кориолиса (поворотным ускорением)

$$\vec{a}_K = 2\vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (1.7)$$

Согласно второму закону Ньютона, направление ускорения всегда совпадает с направлением силы, вызвавшей ускоренное движение материальной точки. Значит, внешняя сила \vec{F} по направлению совпадает с ускорением \vec{a}_K . В точке B ускорение Кориолиса направлено в отрицательную сторону оси Oy . Таким образом, ускорение \vec{a}_K вызвано внешними силами \vec{F} .

В точке A модуль поворотного ускорения

$$a_K = 2\omega V, \quad (1.8)$$

так как угол между векторами $\vec{\omega}$ и \vec{V} равен $\pi/2$. В точке A_1 ускорение $a_K = 2\omega V \cos \varphi$ (см. рис. 1.7, б)), а в точке A_n $a_K = 0$. Распределение ускорения по ободу ротора показано на рисунке 1.7, в).

Внешние силы, действующие на материальные точки, составляющие ротор, образуют главный момент внешних сил \vec{M} , результатом действия которого является вращение ротора со скоростью $\vec{\omega}$.

Рассмотренное движение ротора с угловой скоростью $\vec{\omega}$ называется **прецессионным движением** или **прецессией**. На первый взгляд это движение кажется парадоксальным: внешний момент стремится повернуть ротор вокруг оси Oz , а вызванное им вращение происходит вокруг оси Ox . Кажущаяся парадоксальность прецессии – следствие того, что не учитывается движение точек ротора перпендикулярное действию сил, и ротор рассматривается как неподвижное тело.

Прецессия просто объясняется с помощью теоремы Резаля. Приложим к ротору гироскопа момент внешних сил \vec{M} по оси Oz так, как показано на рисунке 1.8.

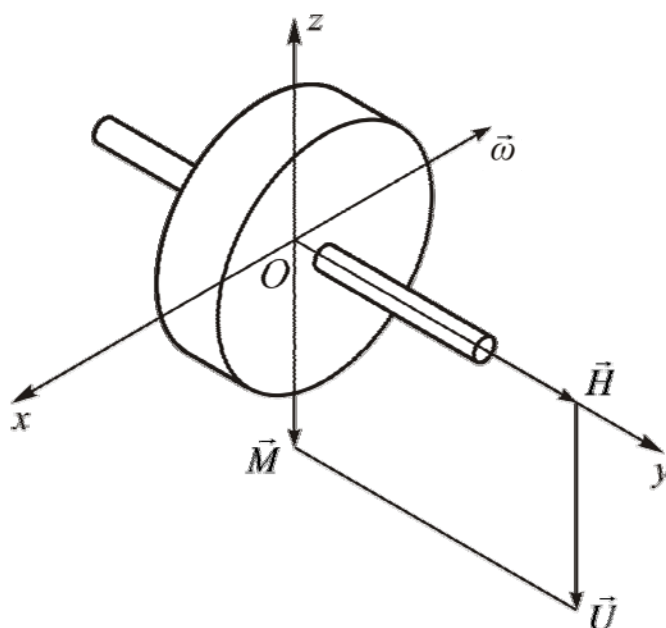


Рис. 1.8. Скорость прецессии

Если ротор не вращается $\vec{N} = 0$, то под действием момента \vec{M} главная ось гироскопа будет поворачиваться относительно оси Oz . Если ротор гироскопа вращается с угловой скоростью $\vec{\phi}$, то гироскоп обладает собственным кинетическим моментом \vec{N} . Согласно теореме Резаля конец вектора \vec{N} движется с линейной скоростью $\vec{U} = \vec{M}$. Главная ось гироскопа в этом случае вращается относительно оси Ox , то есть вектор угловой скорости прецессии перпендикулярен плоскости векторов \vec{N} и \vec{M} .

Обратимся к рисунку 1.7, а). Под действием момента внешних сил, как было показано выше, диаметрально противоположные точки ротора гироскопа движутся с поворотным ускорением \vec{a}_k . Соответствующие этому ускорению силы инерции $m\vec{a}_k$ (кориолисовы силы инерции) образуют главный момент сил

инерции \vec{M}_r , который направлен по оси Oz в положительную сторону и приложен к внутренней рамке, т.е. к телу, которое, действуя на ротор моментом внешних сил \vec{M} , изменяет направление главной оси.

Согласно принципу Даламбера сумма главного момента внешних сил и главного момента сил инерции всех частиц механической системы равна нулю:

$$\vec{M} + \vec{M}_r = 0. \quad (1.9)$$

Момент кориолисовых сил инерции называется **моментом гироскопической реакции** или **гироскопическим моментом**. Гироскопический момент направлен противоположно внешнему моменту \vec{M} и равен ему по модулю

$$\vec{M}_r = -\vec{M}.$$

В дальнейшем мы иногда будем пользоваться выражением: «внешний момент уравнивается гироскопическим». Это выражение условно; под ним понимается равенство $\vec{M} + \vec{M}_r = 0$. В действительности равновесия нет, так как момент \vec{M} приложен к ротору гироскопа, а момент \vec{M}_r к внутренней или наружной раме (к другому телу).

Для определения направления вектора угловой скорости прецессии и вектора гироскопического момента удобно пользоваться правилами Жуковского [20]:

а) при действии на гироскоп момента внешних сил происходит прецессия с угловой скоростью $\vec{\omega}$ таким образом, чтобы вектор кинетического момента \vec{H} совместился кратчайшим путём с вектором момента внешних сил \vec{M} . При этом вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен так, что если смотреть с конца этого вектора, то поворот вектора \vec{H} к вектору \vec{M} происходит против хода часовой стрелки.

б) если существует прецессия гироскопа, то всегда можно вычислить гироскопический момент, который как бы стремится кратчайшим путём «совместить» кинетический момент с угловой скоростью прецессии. Гироскопический момент направлен так, что, глядя с конца его вектора, указанное «совмещение» кажется происходящим против хода часовой стрелки.

Определим угловую скорость прецессии и гироскопический момент через параметры гироскопа. Согласно формуле $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ для скорости точки твёрдого тела в его вращательном движении скорость \vec{U} конца вектора определяется равенством

$$\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{H}. \quad (1.10)$$

Учитывая, что $\vec{U} = \vec{M}$, имеем

$$\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{H}. \quad (1.11)$$

Модуль внешнего момента

$$M = \omega H \sin \theta, \quad (1.12)$$

где θ – угол между вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектором \vec{H} . Отсюда

$$\omega = \frac{M}{H \sin \theta}. \quad (1.13)$$

Если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то
$$\omega = \frac{M}{H}. \quad (1.14)$$

Так как $\vec{M}_r = -\vec{M}$, то для гироскопического момента можно записать

$$\vec{M}_r = \vec{H} \times \vec{\omega}. \quad (1.15)$$

Модуль гироскопического момента

$$M_r = H\omega \sin \theta. \quad (1.16)$$

Следует заметить, что при вращении ротора гироскопа вокруг собственной оси его частицы обладают силами инерции: центробежными, тангенциальными. Но не они создают гироскопический момент, его образуют только силы инерции Кориолиса.

Гироскопический момент – это противодействие, оказываемое быстровращающимся ротором телу, пытающемуся изменить направление его оси вращения.

Свойство прецессии и проявление гироскопического момента рассмотрим на примере трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе. Пусть внешний момент \vec{M}_1 направлен по оси внутренней рамки гироскопа (рис. 1.9, а)), а главная ось гироскопа составляет с осью наружной рамки угол $\theta = 90^\circ - \beta_0$. Под действием внешнего момента возникает скорость прецессии $\vec{\omega}_1$, которая направлена по оси наружной рамки, так как кинематика карданова подвеса «позволяет» вращение только относительно этой оси. Гироскопический момент при этом равен:

$$M_r = H\omega_1 \sin \theta = H\omega_1 \cos \beta_0$$

и направлен по оси внутренней рамки. По принципу Даламбера момент \vec{M}_r равен и противоположно направлен внешнему моменту \vec{M}_1

$$H\omega_1 \cos \beta_0 = M_1,$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{M_1}{H \cos \beta_0}.$$

Скорость прецессии, как видим, зависит от угла β_0 отклонения главной оси гироскопа от перпендикуляра к оси наружной рамки.

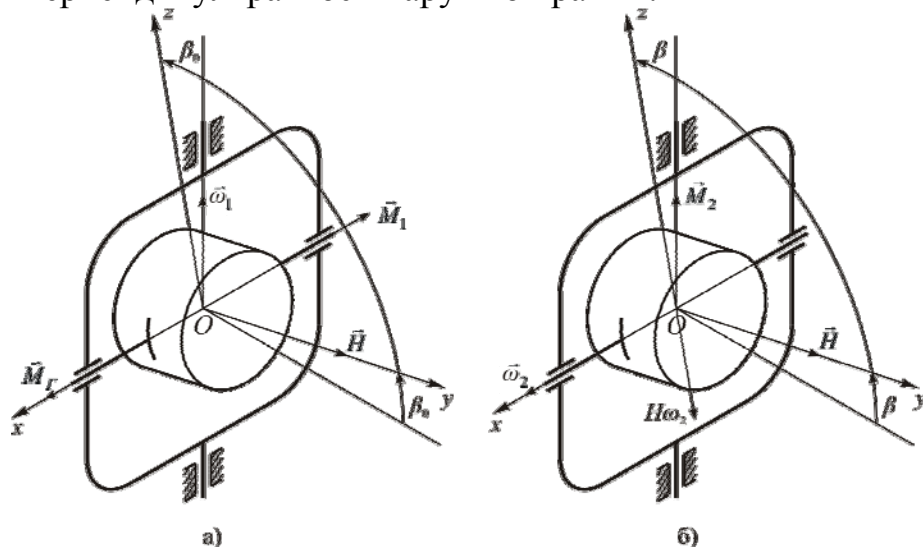


Рис. 1.9. Скорость прецессии и гироскопический момент гироскопа в кардановом подвесе

Если внешний момент приложен к оси наружной рамки (рис. 1.9, б)), то прецессия возникает относительно оси внутренней рамки со скоростью $\vec{\omega}_2$. Угол β теперь изменяется от 0 до $\pi/2$. Гироскопический момент равен $H\omega_2$ и направлен как показано на рисунке 1.9, б). Внешний момент \vec{M}_2 уравнивается проекцией гироскопического момента на ось вращения наружной рамки $H\omega_2 \cos \beta$.

В итоге получим

$$H\omega_2 \cos \beta = M_2, \quad \omega_2 = \frac{M_2}{H \cos \beta}. \quad (1.17)$$

Из равенства (1.17) видно, что как только угол β станет равным $\pi/2$ (рамки гироскопа сложатся), проекция гироскопического момента станет равной нулю, и приведенное уравнение теряет смысл. Гироскоп под действием момента \vec{M}_2 будет свободно вращаться относительно оси наружной рамки, т.е. он потеряет свои свойства. Поэтому на практике не допускают сложения рамок гироскопа.

Как будет вести себя гироскоп, если внешний момент приложить к оси ротора (рис. 1.10, а)).

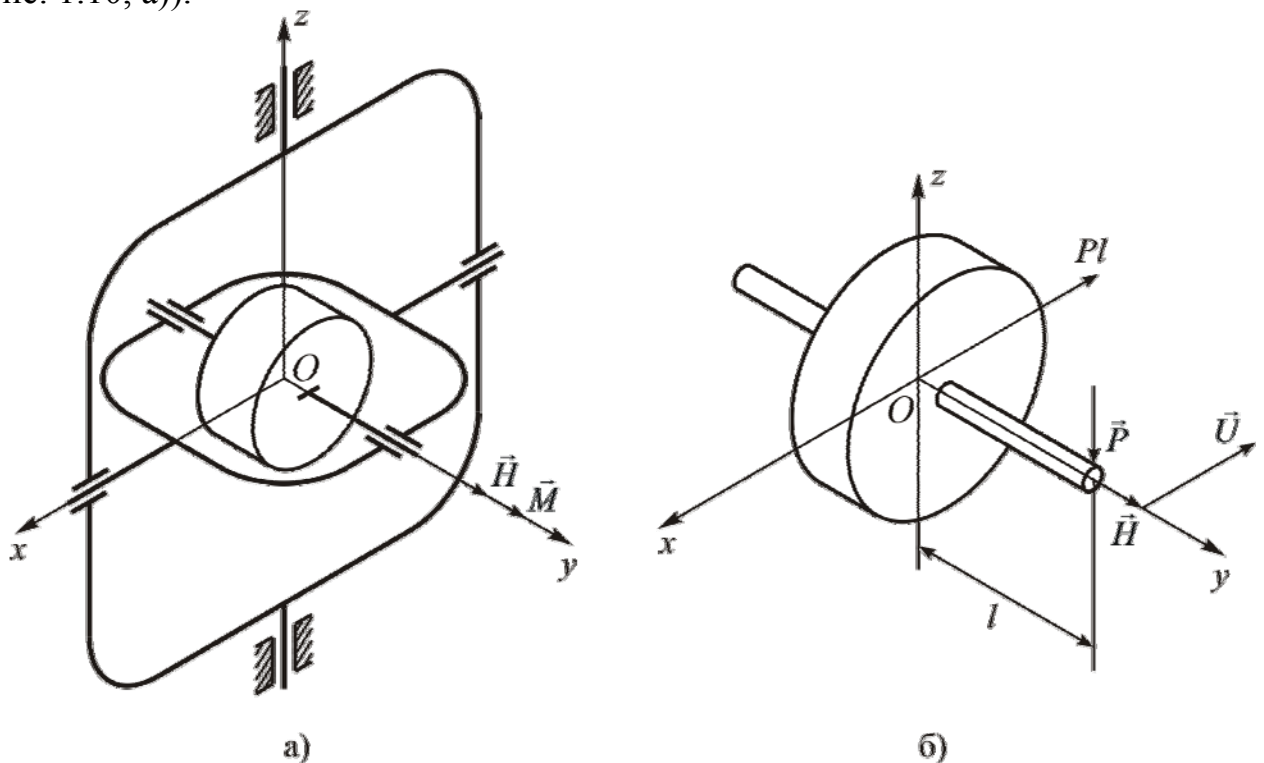


Рис. 1.10. Действие внешнего момента по главной оси и влияние удара на гироскоп

Этот момент может быть приложен, например, со стороны статора гироскопического двигателя. Согласно теореме Резаля вектор \vec{H} должен изменяться так, чтобы конец его перемещался вдоль линии действия вектора \vec{M} . Вектор \vec{H} будет удлиняться или укорачиваться, не изменяя своего направления.

Так как \vec{H} направлен по главной оси гироскопа, то она не изменит своего направления.

По теореме об изменении кинетического момента можно записать

$$\frac{d}{dt}(J_0 \vec{\dot{\phi}}) = \vec{M} .$$

В проекции на ось Oy получим

$$J_0 \frac{d\dot{\phi}}{dt} = M_y . \quad (1.18)$$

Итак, момент относительно оси собственного вращения гироскопа вызывает лишь изменение угловой скорости вращения (ротор разгоняется или останавливается), но не изменяет направления оси гироскопа.

Уравнение (1.18) описывает движение ротора относительно главной оси. Момент $M_y = M_{\text{ос}} - M_c$. Момент $M_{\text{ос}}$ – движущий момент; момент M_c – момент сопротивления, обусловленный трением в опорах ротора и трением ротора о газовую среду. С ростом скорости $\dot{\phi}$ вращения ротора растет момент сопротивления. Когда $M_c = M_{\text{ос}}$, тогда скорость $\dot{\phi}$ станет постоянной и уравнение (1.18) примет вид

$$J_0 \frac{d\dot{\phi}}{dt} = M_{\text{ос}} - M_c = 0 .$$

Это означает, что собственный кинетический момент гироскопа

$$H = J_0 \dot{\phi} = \text{const} .$$

Если по главной оси гироскопа нанести удар, то ось гироскопа почти не изменит своего направления. Гироскоп как бы не чувствителен к мгновенным ударным нагрузкам (рис. 1.10, б)). Скорость \vec{U} будет иметь место только во время действия силы удара \vec{P} , а она прикладывается к гироскопу на очень малое время.

1.4. Свойства двухстепенного гироскопа

Гироскоп с двумя степенями свободы может быть получен из трехстепенного, если закрепить одну из рамок. Кинематическая схема двухстепенного гироскопа представлена на рисунке 1.11, а).

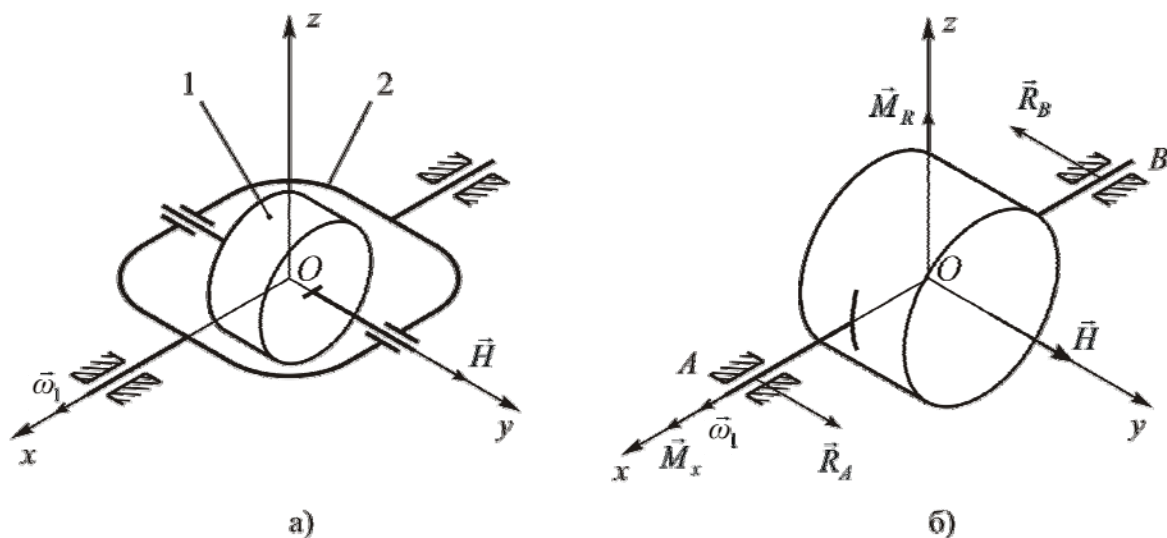


Рис. 1.11. Кинематическая схема двухстепенного гироскопа

Быстровращающийся ротор 1 (см. рис. 1.11, а) укреплен в рамке 2, которая вместе с ротором может вращаться относительно своей оси Ox . Рамка может выполняться в виде камеры (см. рис. 1.11, б)).

Пусть к оси рамки приложен внешний момент \vec{M}_x [29]. Так как в опорах рамки всегда есть зазор, то гироскоп получает третью степень свободы. Он может поворачиваться в пределах этого зазора относительно оси Oz . По свойству трёхстепенного гироскопа начинается прецессия главной оси гироскопа относительно оси Oz . Ось рамки гироскопа упрется в подшипники, со стороны которых на ось будут действовать реакции \vec{R}_A, \vec{R}_B , создавая момент \vec{M}_R , направленный так, как показано на рисунке 1.11, б). В соответствии с законом прецессии гироскоп будет вращаться относительно оси Ox со скоростью $\vec{\omega}_1$, стремясь вектором \vec{H} совместиться с вектором момента \vec{M}_R . Это вращение происходит в том же направлении, в каком момент \vec{M}_x стремится повернуть рамку гироскопа. Гироскоп ускоренно вращается относительно оси Ox как обычное твердое тело. Пусть основание, на котором установлен двухстепенный гироскоп, вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}$. При таком вращении со стороны основания на ось рамки в опорах A и B будут действовать силы \vec{F}_A и \vec{F}_B (рис. 1.12).

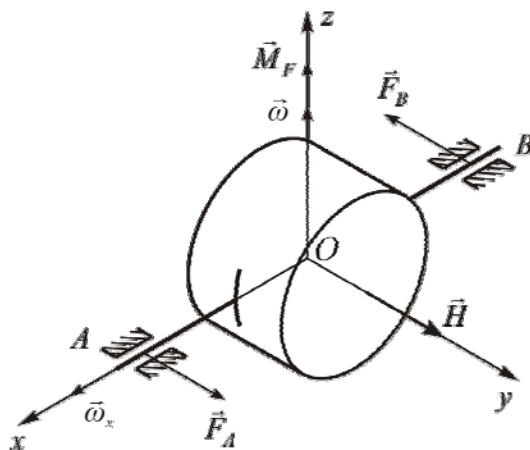


Рис. 1.12. Движение гироскопа
при вращении основания

Эти силы создают момент \vec{M}_F . Гироскоп будет прецессировать к этому моменту с угловой скоростью $\vec{\omega}_x$ до тех пор, пока главная ось не совместится с вектором \vec{M}_F , а, следовательно, и со скоростью $\vec{\omega}$ вынужденного поворота. При изменении направления вращения основания гироскоп будет отклоняться в другую сторону. Таким образом, **ось собственного вращения ротора двухстепенного гироскопа стремится совместиться с вектором угловой скорости вращения основания.** Двухстепенный гироскоп реагирует только на вращение вокруг оси Oz , оси перпендикулярной плоскости, проходящей через главную ось и ось рамки. Ось Oz называется осью чувствительности двухстепенного гироскопа.

1.5. Гироскопические эффекты в технике

С гироскопическими явлениями мы часто сталкиваемся в повседневной жизни, порой, не замечая их. Живем мы на огромном гироскопе – Земле. Суточное вращение Земли является собственным вращением гироскопа Земля. Скорость суточного вращения Земли – $15^\circ/\text{час}$ ($7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$). Благодаря этому вращению ось вращения Земли сохраняет неизменное положение в пространстве, аналогично главной оси свободного гироскопа.

В технике широко применяются вращающиеся маховики, турбины, винты, колеса и роторы различного типа, для накопления энергии в ограниченном пространстве, для преобразования одного вида энергии в другой (паровые, газовые, водяные турбины, ветряки, компрессоры, насосы, электрические генераторы и двигатели и др.); для получения поступательного движения колесных видов транспорта; в качестве движителей – воздушные и водяные винты.

Во всех этих случаях вращающиеся твердые тела обладают значительным кинетическим моментом, и, если ось их вращения изменяет свое направление в инерциальном пространстве, возникают гироскопические эффекты, которые иногда полезны, иногда нежелательны и даже опасны.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Мельничные бегуны

Для измельчения руды, зерна и т.п. применяются мельницы [20], в которых размалывание производится с помощью бегунов (рис. 1.13).

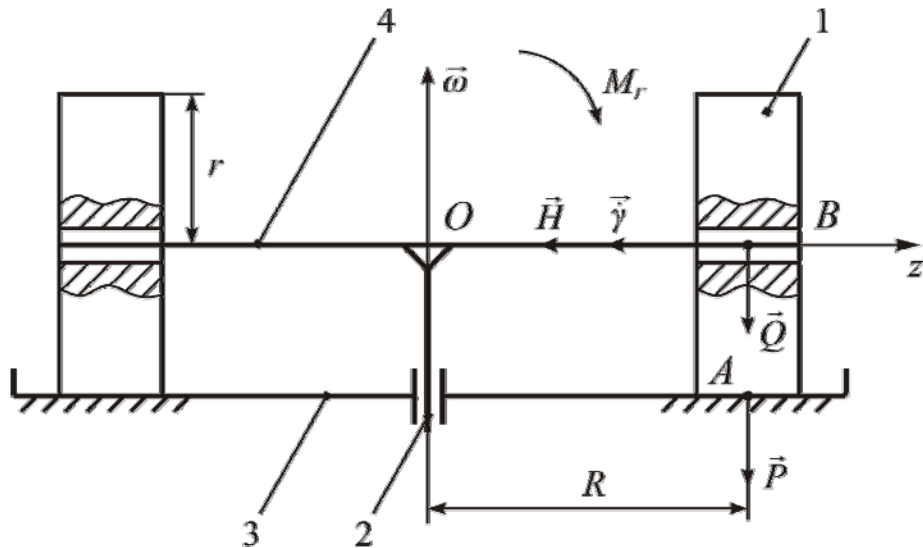


Рис. 1.13. Схема мельничных бегунов: 1 – каток; 2 – приводной вал; 3 – опорная плита; 4 – поводок

Мельничные бегуны состоят из катков 1, соединенных при помощи поводка 4, связанного шарнирно с приводным валом 2. При вращении приводного вала катки перекачиваются без скольжения по опорной плите 3, подминая под себя материал. Если бегуны не вращаются, то их давление на плиту определяется весом \vec{P} . Сила воздействия бегунов на плиту изменяется, если приводной вал вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Катки в этом случае вращаются с угловой скоростью $\vec{\gamma}$. Так как мгновенная линейная скорость точки *A* равна нулю, то скорость точки *B* определяется выражением:

$$v_B = \omega R = \dot{\gamma} r, \quad (1.19)$$

откуда

$$\dot{\gamma} = \omega \frac{R}{r}. \quad (1.20)$$

Кинетический момент бегуна

$$H = J_z \dot{\gamma}, \quad (1.21)$$

где J_z – момент инерции цилиндрического катка относительно оси *Oz*

$$J_z = \frac{mr^2}{2} = \frac{P}{2g} r^2. \quad (1.22)$$

Гироскопический момент определяется по формуле

$$M_r = H\omega = \frac{P}{2g} \omega^2 Rr. \quad (1.23)$$

Он направлен так, что давление на опорную плиту увеличивается. Дополнительное давление бегуна на плиту равно

$$Q = \frac{M_r}{R} = \frac{P}{2g} \omega^2 r. \quad (1.24)$$

Результирующее воздействие на опорную плиту будет

$$Q + P = P \left(1 + \frac{\omega^2 r}{2g} \right). \quad (1.25)$$

Давление на опору не зависит от расстояния R бегунов от приводного вала, а полностью определяется угловой скоростью вала и радиусом бегунов.

Пример. Параметры мельницы

$$P = 100 \text{ Н}; \quad r = 0,5 \text{ м}; \quad \omega = 80 \text{ об/мин.}$$

Определить дополнительное давление Q бегуна на опорную плиту, обусловленное гироскопическим моментом.

$$Q = 100 \frac{\left(\frac{2\pi}{60} \cdot 80 \right)^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 9,8} \approx 160 \text{ Н.}$$

Дополнительное давление, как видим, более чем в 1,5 раза превышает вес бегуна.

2. Подвижные объекты (самолеты, корабли, вертолеты), несущие вращающиеся винты, турбины

На современных подвижных объектах много вращающихся твердых тел: роторов, гребных винтов и их валов. Оси этих роторов могут быть расположены параллельно продольной, поперечной и вертикальной осям подвижного объекта, например, корабля (рис. 1.14).

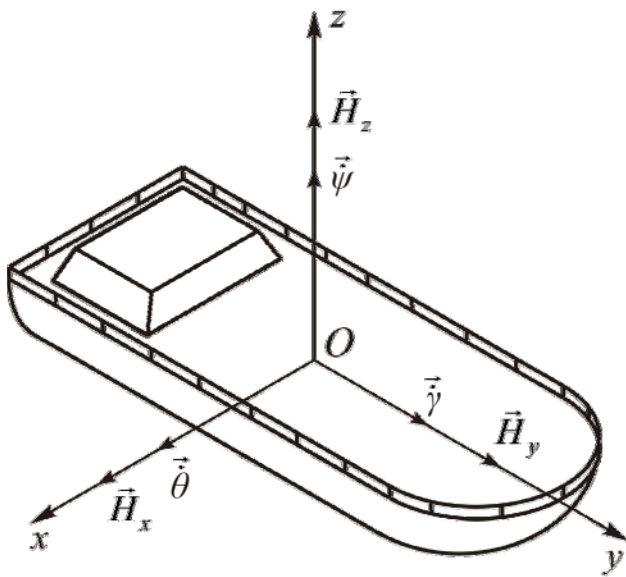


Рис. 1.14. Гироскопические моменты на подвижном основании

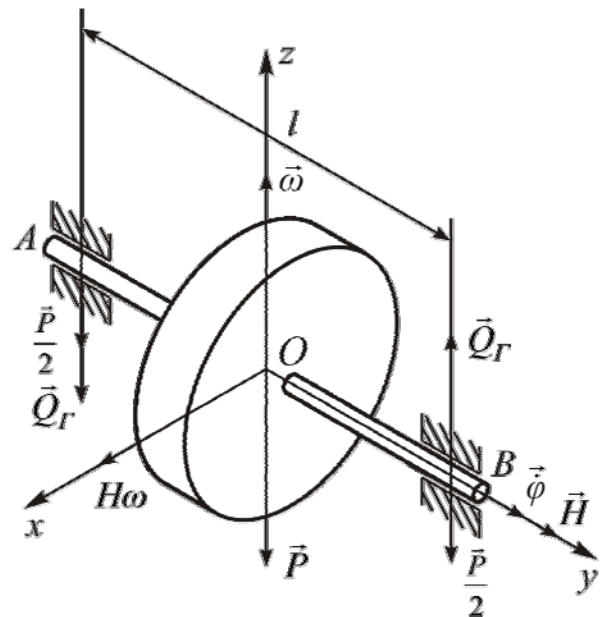


Рис. 1.15. Гироскопический момент ротора

Свяжем с кораблем систему координат $Oxyz$ и рассмотрим малые угловые колебания корабля относительно выбранных осей.

Колебания корабля задаются углами: ψ – рыскания, θ – дифферента и γ – крена. Составляющие вектора кинетического момента роторов обозначим через \vec{H}_x , \vec{H}_y , \vec{H}_z . При вращении корабля относительно осей Ox , Oy , Oz со стороны вращающихся роторов будут приложены гироскопические моменты

$$\begin{aligned}
M_x &= H_y \dot{\psi} - H_z \dot{\gamma}; \\
M_y &= H_z \dot{\theta} - H_x \dot{\psi}; \\
M_z &= H_x \dot{\gamma} - H_y \dot{\theta}.
\end{aligned}
\tag{1.26}$$

Эти моменты связывают колебания корабля по всем трем осям, то есть килевая, бортовая качка и рыскание, повороты при маневрах не являются независимыми. Это усложняет управление кораблем. Эти моменты при резких изменениях углов корабля могут быть очень большими и вызвать поломку осей роторов и подшипников, если не учесть их при проектировании.

3. Пусть ротор, установленный на подвижном основании, вращается с угловой скоростью $\dot{\phi}$ (рис. 1.15)

Если вес ротора \vec{P} , то сила с которой ротор действует на подшипник A и B равна $P/2$. При вращении основания с угловой скоростью $\vec{\omega}$ возникает гироскопический момент $M_r = H\omega$, направленный так, что давление в опоре A возрастает, а в опоре B уменьшается.

Силы, обусловленные гироскопическим моментом $Q_r = H\omega/l$. Эти силы необходимо учитывать при расчете опор вращающихся роторов и их валов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется в технике гироскопом?
2. Что означает слово гироскоп?
3. Привести схемы подвеса быстровращающегося ротора, обеспечивающие ему три степени свободы относительно неподвижной точки?
4. Какой гироскоп называют астатическим, свободным?
5. Изобразить схемы трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе с вертикальным расположением: главной оси, оси внутренней и оси наружной рамок.
6. Записать выражения для вектора кинетического момента гироскопа, вектора собственного кинетического момента гироскопа.
7. Совпадает ли направление вектора кинетического момента гироскопа с главной осью?
8. Сформулировать и доказать свойства трехстепенного свободного гироскопа:
 - основное свойство;
 - свойство прецессии.
9. Пояснить возникновение гироскопического момента и сформулировать правило для определения его направления.
10. Сформулировать правило определения скорости прецессии гироскопа.
11. На примере гироскопа в кардановом подвесе показать векторы угловой скорости и гироскопического момента при действии на гироскоп внешних моментов по осям внутренней и наружной рамок. Привести формулы для вычисления их величин.
12. Что имеют в виду, когда говорят: «движение гироскопа безынерционно», «гироскоп обладает высокой инерционностью»?
13. Показать, как проявляется ускорение Кориолиса при движении корабля в районах Северного и Южного полюсов, на экваторе.
14. Изобразить схему двухстепенного гироскопа и объяснить его свойства.
15. Получить выражения для гироскопических моментов, приложенных к самолету со стороны вращающихся роторов.
16. Турбина расположена на корабле так, что ось ротора параллельна продольной оси корабля. Корабль движется по окружности. Угловая скорость циркуляции $\Omega=5$ °/с.

Дано: масса ротора 400 кг; радиус инерции ротора $\rho=0,6$ м; расстояние между подшипниками $l=2$ м; угловая скорость ротора $n=3000$ об/мин.

Найти: момент инерции ротора турбины; кинетический момент ротора; гироскопический момент; гироскопическую реакцию в подшипниках.

17. Для гироскопа с параметрами $J_0=0,4$ кг·см²; $\dot{\varphi}=3000$ об/мин; $M_1=0,5 \cdot 10^{-2}$ Н·м·с определить кинетический момент и скорость прецессии (угол $\beta_0=1; 5; 10; 20; 30$ градусов).

Момент M_1 приложен к гироскопу по оси наружной рамки.

2. ТЕОРИЯ ТРЕХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА

В основе теории гироскопов лежит кинематика и динамика твердого тела, совершающего сферическое движение. Параметрами, определяющими положение ротора относительно заданной системы координат, являются **углы Эйлера–Крылова**. Рассмотрим эти параметры на примере гироскопа, изображенного на рисунке 2.1, а).

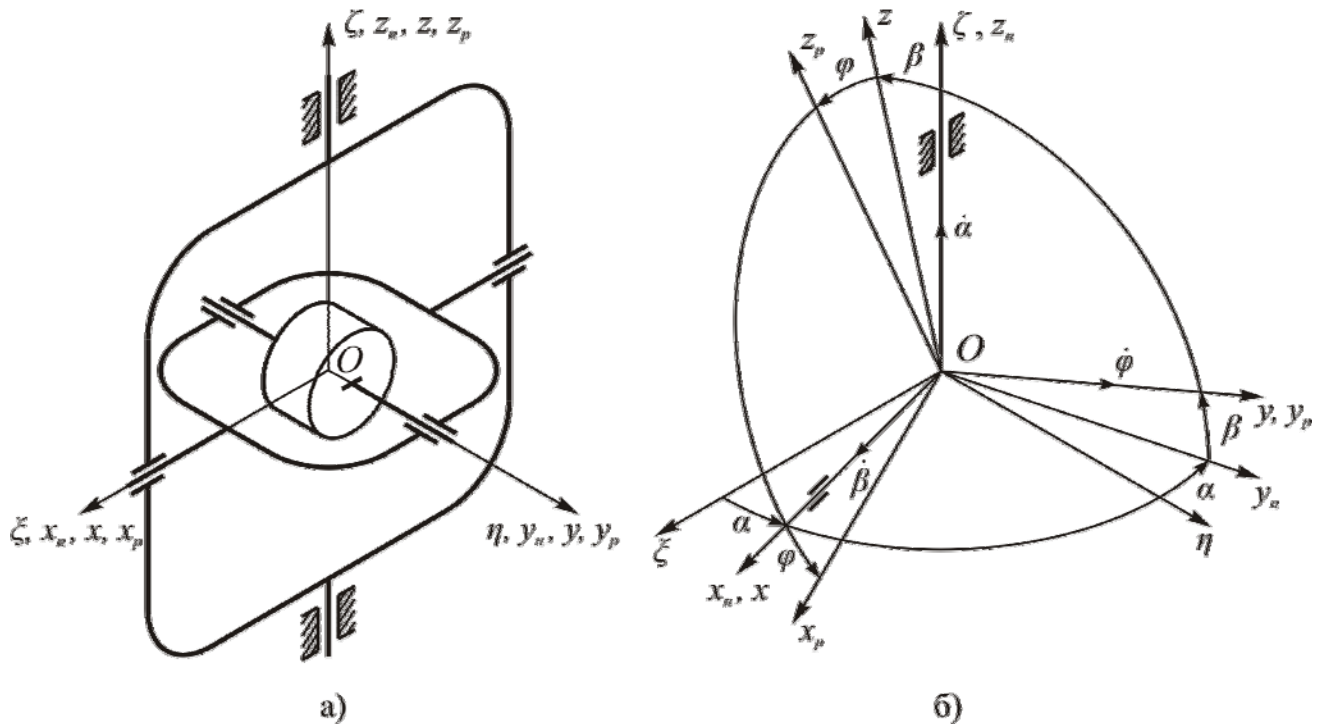


Рис. 2.1. Кинематическая схема, углы Эйлера–Крылова

На рисунке 2.1 показаны следующие системы координат:

$O\xi\eta\zeta$ – базовая (инерциальная система координат);

$Ox_n y_n z_n$ – система координат, связанная с наружной рамкой;

$Ox y z$ – система координат, связанная с внутренней рамкой;

$Ox_p y_p z_p$ – система координат, связанная с ротором.

На рисунке 2.1, а) выбранные системы координат находятся в согласованном положении. Положение ротора гироскопа определяется взаимным расположением осей $Ox_p y_p z_p$ и $O\xi\eta\zeta$, то есть углами α , β и φ . Перевод системы координат, связанной с ротором, из ее исходного положения $O\xi\eta\zeta$ в заданное $Ox_p y_p z_p$ осуществляется тремя поворотами (рис. 2.1, б)):

- поворот относительно оси наружной рамки на угол α ;
- поворот относительно оси внутренней рамки на угол β ;
- поворот относительно главной оси на угол φ .

Углы α , β и φ считаются положительными, если вращение наружной, внутренней рамок и ротора происходит против хода часовой стрелки, если наблюдать за вращением со стороны положительных направлений осей.

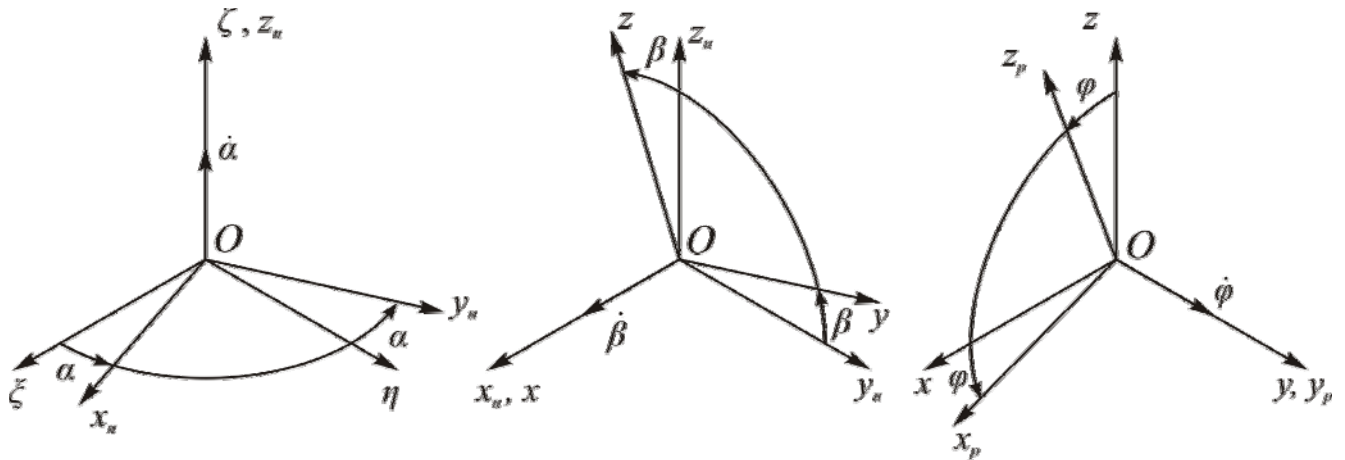


Рис. 2.2. Последовательность поворотов осей гироскопа

На рисунке 2.2 показан поворот наружной рамки относительно базовой системы координат на угол α , поворот внутренней рамки вместе с ротором на угол β и поворот ротора на угол φ . Введенные таким образом углы α , β и φ называют углами Эйлера–Крылова.

2.1. Составление уравнений движения гироскопа с использованием теоремы об изменении кинетического момента

При составлении уравнений движения гироскопа будем полагать:

- оси Ox_n , Oy_p ; Ox_n , Oz и Oy_p , Oz взаимноперпендикулярны;
- наружная, внутренняя рамки и ротор являются абсолютно твердыми телами;
 - все тела, входящие в состав гироскопа статически сбалансированы относительно точки подвеса гироскопа, т. е. центры масс рамок и ротора совпадают с точкой подвеса гироскопа;
 - все элементы гироскопа динамически сбалансированы относительно точки подвеса гироскопа. Это означает, что тензоры инерции рамок и ротора относительно этой точки имеют диагональный вид, т. е. оси систем координат, связанных с рамками и ротором, являются главными осями инерции (центробежные моменты инерции равны нулю);
 - ротор имеет равные моменты инерции относительно осей перпендикулярных к оси его вращения и проходящих через точку подвеса гироскопа.

С помощью рисунка 2.2 находим проекции абсолютной угловой скорости

$$\begin{aligned} \omega_{x_H} &= 0; \omega_{y_H} = 0; \omega_{z_H} = \dot{\alpha}; \\ \omega_x &= \dot{\beta}; \omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta; \omega_z = \dot{\alpha} \cos \beta; \\ \omega_{x_p} &= \dot{\beta} \cos \varphi - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \varphi; \omega_{y_p} = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta; \omega_{z_p} = \dot{\beta} \sin \varphi + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Теорема об изменении кинетического момента в инерциальной системе координат записывается в виде

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}. \quad (2.2)$$

При выводе уравнений движения гироскопа уравнение (2.2) проецируется на оси систем координат связанные с телами, входящими в состав гироскопа. В системе координат $Oxyz$, связанной с внутренней рамкой гироскопа уравнение (2.2) принимает форму

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}, \quad (2.3)$$

где $\frac{\tilde{d}\vec{K}}{dt}$ – локальная производная вектора \vec{K} , характеризующая изменение вектора \vec{K} относительно осей $Oxyz$; $\vec{\omega}$ – угловая скорость осей $Oxyz$; \vec{M} – главный момент внешних сил.

Векторное произведение

$$\vec{\omega} \times \vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \vec{i}(\omega_y K_z - \omega_z K_y) + \vec{j}(\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \vec{k}(\omega_x K_y - \omega_y K_x),$$

где ω_x , ω_y и ω_z – проекции абсолютной угловой скорости на оси системы координат $Oxyz$, K_x , K_y и K_z – проекции кинетического момента гироскопа на эти же оси.

В проекциях на оси связанные с внутренней рамкой уравнение (2.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= M_x, \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= M_y, \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x &= M_z, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где M_x , M_y , M_z – проекции вектора \vec{M} на оси системы координат $Oxyz$.

Введем обозначения моментов инерции рамок и ротора гироскопа:

J_{x_H} , J_{y_H} , J_{z_H} – моменты инерции наружной рамки относительно осей Ox_H , Oy_H , Oz_H ;

J_{6x} , J_{6y} , J_{6z} – моменты инерции внутренней рамки относительно осей Ox , Oy , Oz ;

$J_{x_p} = J_{z_p} = J_{\ominus}$ – момент инерции ротора относительно осей Ox_p , Oz_p – экваториальный момент инерции ротора;

$J_{y_p} = J_0$ – момент инерции ротора относительно оси Oy_p – осевой момент инерции ротора.

Рассмотрим элементы, входящие в состав гироскопа.

1. Ротор (рис. 2.3).

Покажем в системе координат $Ox_p y_p z_p$ проекции угловой скорости ротора и проекции кинетического момента ротора.

Проекции угловой скорости определяются по выражению (2.1). Проекции кинетического момента равны:

$$K_{x_p} = J_{\vartheta} \omega_{x_p}; \quad K_{y_p} = J_0 \omega_{y_p}; \quad K_{z_p} = J_{\vartheta} \omega_{z_p}. \quad (2.5)$$

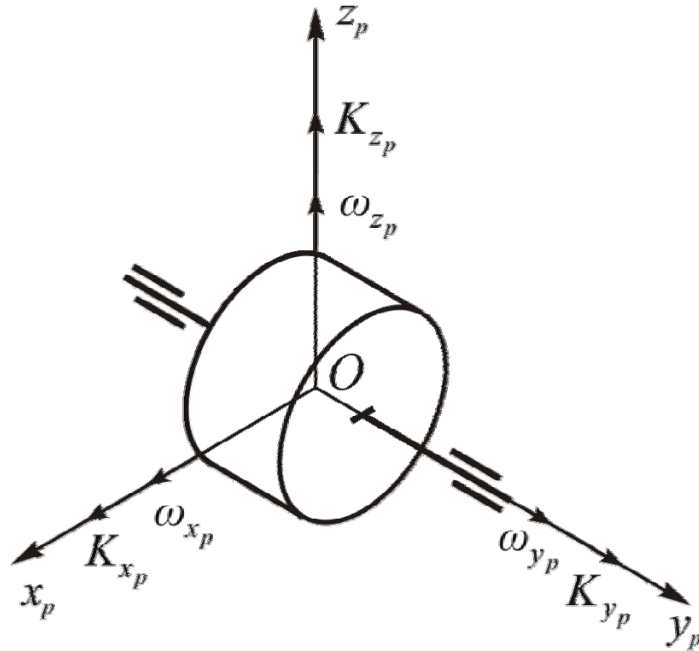


Рис. 2.3. Ротор гироскопа

Движение ротора описывается вторым уравнением системы (2.4), которое в проекции на ось Oy_p имеет вид:

$$\frac{dK_{y_p}}{dt} + \omega_{z_p} K_{x_p} - \omega_{x_p} K_{z_p} = M_{y_p}. \quad (2.6)$$

Подставим в уравнение (2.6) выражения (2.5), получим:

$$J_0 \frac{d\omega_{y_p}}{dt} + J_{\vartheta} \omega_{z_p} \omega_{x_p} - J_{\vartheta} \omega_{x_p} \omega_{z_p} = M_{y_p}$$

или

$$J_0 \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) = M_{y_p}. \quad (2.7)$$

Внешний момент по оси ротора $M_{y_p} = M_{\text{дв}} - M_c$. $M_{\text{дв}}$ – момент двигателя, вращающего ротор, а M_c – момент сопротивления в опорах и момент аэродинамического сопротивления ротора. С учетом этого уравнение движения ротора принимает вид:

$$J_0 \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) = M_{\text{дв}} - M_c. \quad (2.8)$$

2. Внутренняя рамка плюс ротор (рис. 2.4).

Эта система твердых тел вращается относительно оси внутренней рамки, оси Ox .

На рисунке 2.4 показаны проекции угловой скорости и проекции кинетического момента этой системы. Проекции угловой скорости определяются по выражению (2.1). Проекции кинетического момента внутренней рамки с ротором на оси системы координат $Oxyz$ равны:

$$K_x = (J_{\vartheta} + J_{\text{ex}})\omega_x; K_y = J_0\omega_{y_p} + J_{\text{ey}}\omega_y; K_z = (J_{\vartheta} + J_{\text{ez}})\omega_z.$$

Движение рассматриваемых тел описывается первым уравнением системы (2.4), а именно:

$$\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = M_x. \quad (2.10)$$

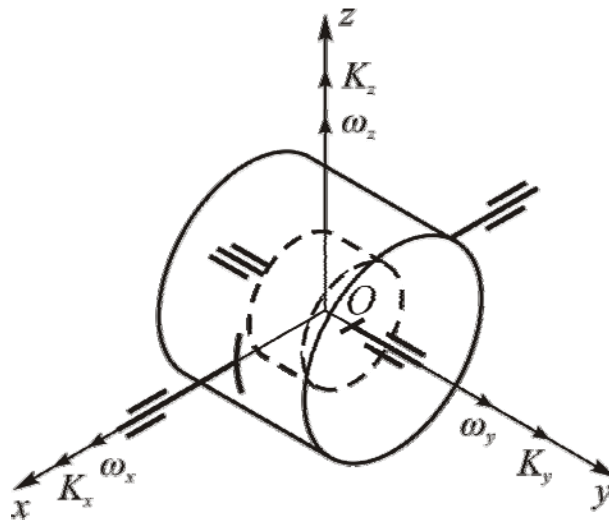


Рис. 2.4. Внутренняя рамка с ротором

После подстановки выражений для проекций кинетического момента и угловой скорости получим:

$$(J_{\vartheta} + J_{\text{ex}})\ddot{\beta} + (J_{\vartheta} + J_{\text{ez}})\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\alpha} \cos \beta - J_{\text{ey}}\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta = M_x.$$

Обозначим $(J_{\vartheta} + J_{\text{ex}}) = B$, $J_{\text{ey}} - J_{\vartheta} - J_{\text{ez}} = D$, тогда уравнение примет вид:

$$B\ddot{\beta} - J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\alpha} \cos \beta - D\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta = M_x. \quad (2.11)$$

3. Система твердых тел: внутренняя рамка с ротором и наружной рамкой.

Составим уравнение движения этой системы относительно оси наружной рамки. Проекция кинетического момента на ось наружной рамки (рис. 2.5) равна:

$$K_{z_H} = J_{z_H}\omega_{z_H} + K_z \cos \beta + K_y \sin \beta. \quad (2.12)$$

Движение гироскопа относительно наружной рамки описывается третьим уравнением системы (2.4), которое в проекции на ось наружной рамки принимает форму:

$$\frac{dK_{z_H}}{dt} + \omega_{x_H} K_{y_H} - \omega_{y_H} K_{x_H} = M_{z_H}. \quad (2.13)$$

Так как $\omega_{x_H} = \omega_{y_H} = 0$, то уравнение (2.13) принимает вид:

$$\frac{dK_{z_H}}{dt} = M_{z_H}. \quad (2.14)$$

После подстановки выражения (2.12) в уравнение (2.14), получим:

$$\frac{d}{dt} \{ J_{z_H} \dot{\alpha} + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \dot{\alpha} \cos^2 \beta + [J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) + J_{\epsilon y} \dot{\alpha} \sin \beta] \sin \beta \} = M_{z_H}.$$

После дифференцирования получим:

$$J_{z_H} \ddot{\alpha} + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \ddot{\alpha} \cos^2 \beta - 2(J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} \cos \beta + J_0 \left[\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \right] \sin \beta + 2J_{\epsilon y} \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + J_{\epsilon y} \ddot{\alpha} \sin^2 \beta = M_{z_H}.$$

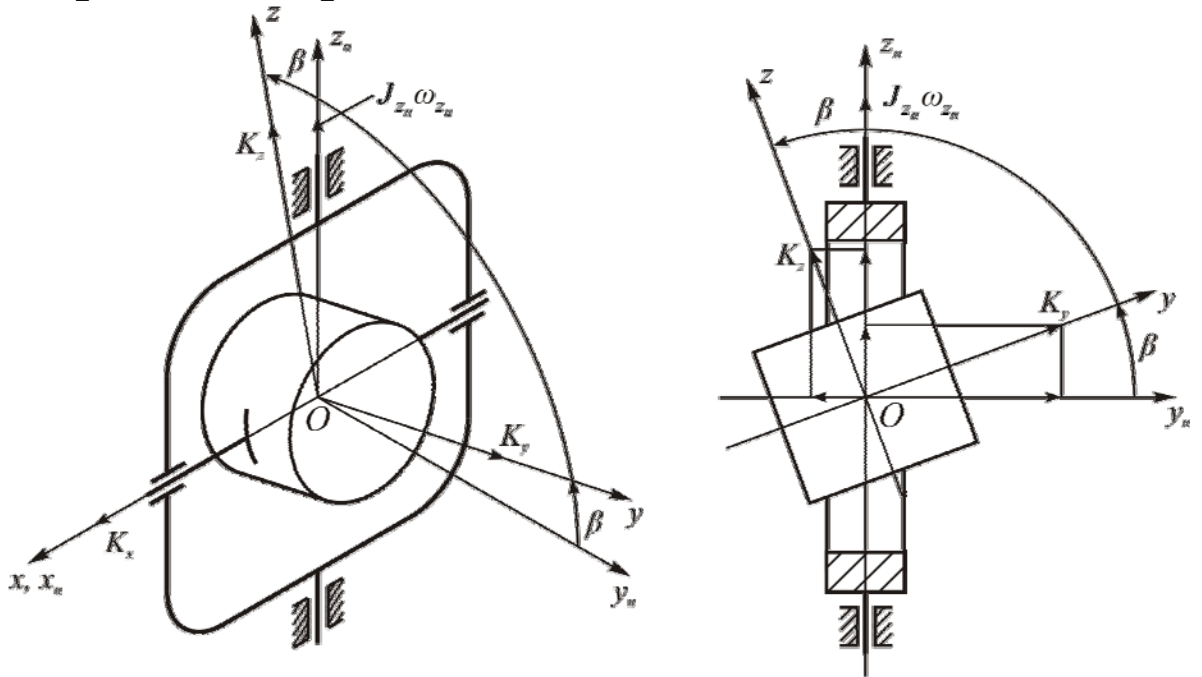


Рис. 2.5. Наружная рамка и внутренняя рамка с ротором

После преобразований уравнение принимает вид:

$$A \ddot{\alpha} + J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} \cos \beta + 2D \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + J_0 \left[\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \right] \sin \beta = M_{z_H}, \quad (2.15)$$

где $A(\beta) = J_{z_H} + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \cos^2 \beta + J_{\epsilon y} \sin^2 \beta$, $D = J_{\epsilon y} - J_{\vartheta} - J_{\epsilon z}$, J_{z_H} – момент инерции наружной рамки относительно оси Oz_H .

Таким образом, движение трехстепенного гироскопа относительно инерциальной системы координат описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} A \ddot{\alpha} + J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} \cos \beta + 2D \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + J_0 \left[\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \right] \sin \beta &= M_{z_H}; \\ B \ddot{\beta} - J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta - D \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta &= M_x; \\ J_0 \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) &= M_{\delta\epsilon} - M_c. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В этих уравнениях моменты $A\ddot{\alpha}$ и $B\ddot{\beta}$ – это моменты сил инерции, обусловленные угловым ускорением, моменты $J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\alpha} \cos \beta$ и $J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\beta} \cos \beta$ – основные гироскопические моменты, моменты $D\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta$ и $2D\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta$ – дополнительные гироскопические моменты.

Система уравнений (2.16) – это дифференциальные нелинейные уравнения с переменным коэффициентом $A(\beta)$.

2.2. Составление уравнений движения трехстепенного гироскопа методом кинетостатики

Метод кинетостатики основан на принципе Даламбера, в соответствии с которым векторная сумма моментов сил инерции, внешних (активных) моментов и моментов реакций связей равны нулю [20]:

$$\vec{M}_{\dot{\omega}} + \vec{M}_r + \vec{M} + \vec{M}_{pc} + m(\vec{\rho} \times \vec{a}) = 0.$$

$M_{\dot{\omega}} = J\dot{\omega}$ – момент сил инерции, обусловленный угловым ускорением, J – момент инерции, $\dot{\omega}$ – абсолютное угловое ускорение. Этот момент направлен противоположно абсолютному ускорению, которое при составлении уравнений считается положительным. M_{pc} – момент реакций связей; $M_r = H\omega$ – гироскопический момент. Направление гироскопического момента определяется по правилу Жуковского; M – внешний момент.

Момент $m(\vec{\rho} \times \vec{a}) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$, где $\vec{\rho}$ – радиус-вектор, определяющий

положение центра масс гироскопа относительно точки подвеса, \vec{a} – абсолютное ускорение точки подвеса гироскопа, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные векторы, x , y , z – координаты центра масс, a_x , a_y , a_z – проекции ускорения \vec{a} на оси системы координат $Oxyz$.

Порядок составления уравнений методом кинетостатики.

1. Изображается заданная схема расположения гироскопа и выбираются системы координат: базовая (опорная), системы координат, связанные с наружной, внутренней рамками и ротором.

2. Изображаются системы координат в рассогласованном положении введением углов Эйлера-Крылова, и определяются проекции абсолютной угловой скорости на оси, связанные с наружной, внутренней рамками и ротором.

3. Для ротора, внутренней рамки с ротором и наружной рамки указываются моменты и проецируются на ось ротора, оси внутренней и наружной рамок.

4. Алгебраическая сумма проекций моментов на оси гироскопа приравнивается нулю.

Составим уравнения движения для гироскопа, изображенного на рисунке 2.6. Выберем следующие системы координат:

$O\xi\eta\zeta$ – базовая (инерциальная) система координат;

$Ox_Hy_Hz_H$ – система координат, связанная с наружной рамкой;

$Oxyz$ – система координат, связанная с внутренней рамкой;

$Ox_p y_p z_p$ – система координат, связанная с ротором.

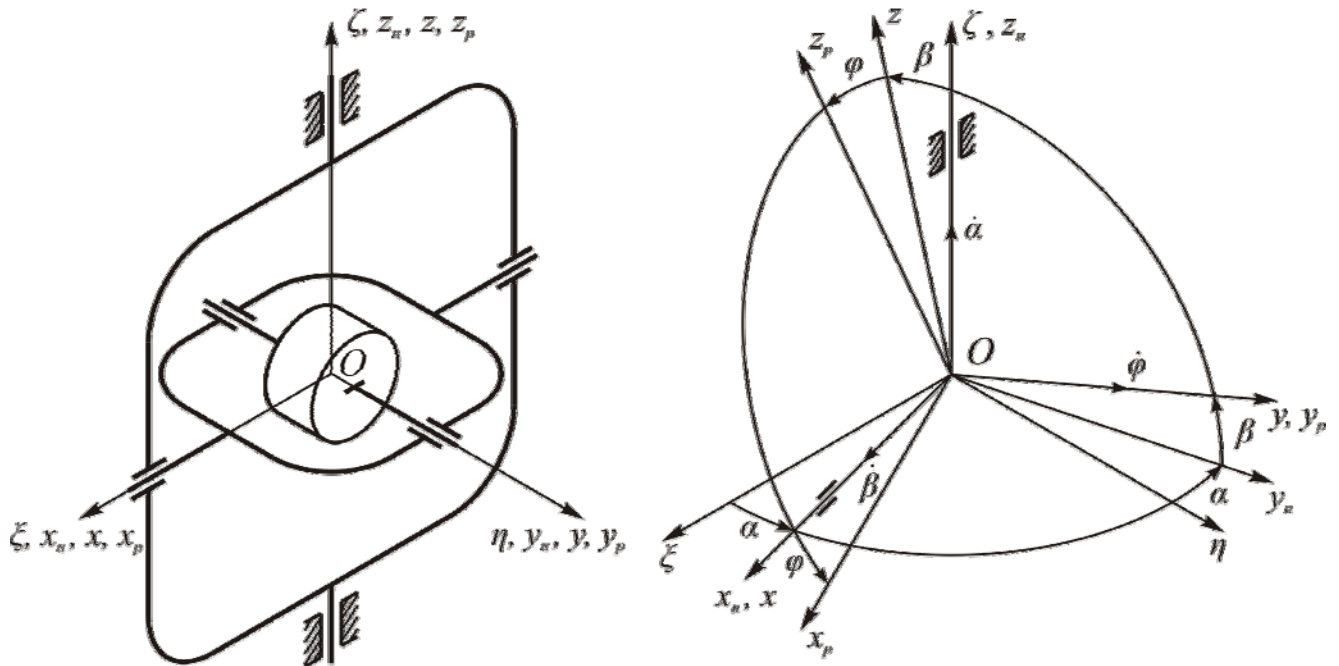


Рис. 2.6. Кинематическая схема и кинематический чертеж трехстепенного гироскопа

Изобразим выбранные системы координат в рассогласованном положении, осуществив поворот гироскопа вокруг оси наружной рамки на угол α , затем поворот внутренней рамки с ротором на угол β и, наконец, поворот ротора на угол φ .

Найдем проекции абсолютной угловой скорости на оси: наружной рамки:

$$\omega_{x_H} = 0; \omega_{y_H} = 0; \omega_{z_H} = \dot{\alpha};$$

внутренней рамки:

$$\omega_x = \dot{\beta}; \omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta; \omega_z = \dot{\alpha} \cos \beta;$$

ротора:

$$\omega_{x_p} = \dot{\beta} \cos \varphi - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \varphi; \omega_{y_p} = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta; \omega_{z_p} = \dot{\beta} \sin \varphi + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \varphi.$$

Рассмотрим ротор гироскопа (рис. 2.7). На осях системы координат $Ox_p y_p z_p$ покажем проекции абсолютной угловой скорости ω_{x_p} , ω_{y_p} , ω_{z_p} и проекции вектора кинетического момента:

$$K_{x_p} = J_{\ominus} \omega_{x_p}, K_{y_p} = J_0 \omega_{y_p}, K_{z_p} = J_{\ominus} \omega_{z_p}.$$

Покажем моменты сил инерции и внешние моменты:

$J_0 \dot{\omega}_{y_p}$ – момент сил инерции от углового ускорения ротора;

$K_{x_p} \omega_{z_p}, K_{z_p} \omega_{x_p}$ – гироскопические моменты;

$M_{y_p} = M_{\text{дв}} - M_c$ – внешний момент, где $M_{\text{дв}}$ – момент, развиваемый двигателем, вращающим ротор, M_c – момент сопротивления опор и момент аэродинамического сопротивления.

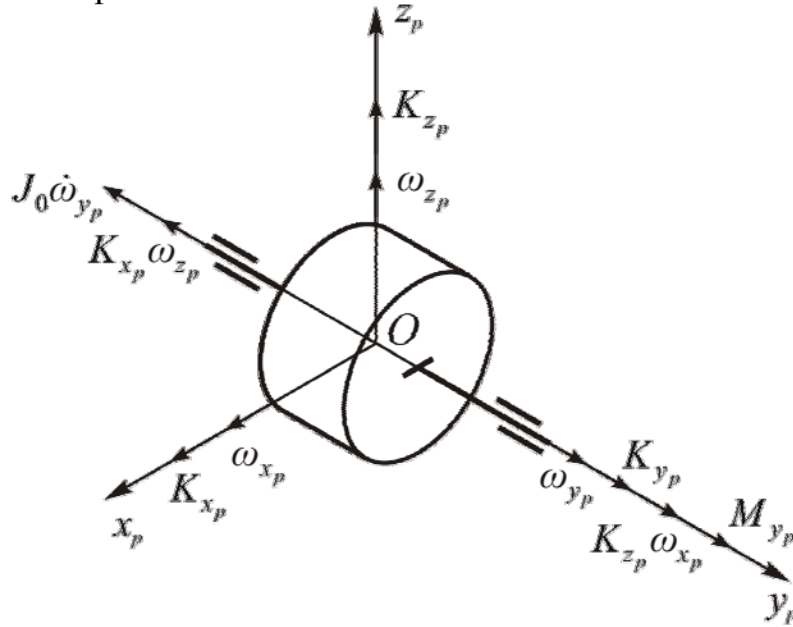


Рис. 2.7. Ротор гироскопа

Алгебраическую сумму проекций указанных моментов приравняем нулю, получим:

$$-J_0 \dot{\omega}_{y_p} - K_{x_p} \omega_{z_p} + K_{z_p} \omega_{x_p} + M_{y_p} = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$J_0 \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) + J_{\text{з}} \omega_{z_p} \omega_{x_p} - J_{\text{з}} \omega_{z_p} \omega_{x_p} = 0.$$

Окончательно уравнение движения ротора гироскопа может быть записано в виде:

$$J_0 \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) = M_{\text{дв}} - M_c. \quad (2.17)$$

Рассмотрим систему двух тел: внутренняя рамка и ротор. Укажем на осях системы координат, связанной с внутренней рамкой, проекции кинетического момента:

$$K_x = (J_{\text{з}} + J_{\text{вх}}) \omega_x; \quad K_y = J_0 \omega_{y_p} + J_{\text{вх}} \omega_y; \quad K_z = (J_{\text{з}} + J_{\text{вз}}) \omega_z$$

и моменты:

$(J_{\text{з}} + J_{\text{вх}}) \dot{\omega}_x$ – момент сил инерции от углового ускорения системы внутренняя рамка – ротор;

$K_y \omega_z = (J_0 \omega_{y_p} + J_{\text{вх}} \omega_y) \omega_z; \quad K_z \omega_y = (J_{\text{з}} + J_{\text{вз}}) \omega_z \omega_y$ – гироскопические моменты;

M_x – внешний момент.

Алгебраическую сумму моментов по оси Ox приравняем нулю, получим уравнение движения гироскопа относительно оси внутренней рамки в виде:

$$J_0 \omega_{y_p} \omega_z + J_{ey} \omega_y \omega_z + M_x - (J_{\vartheta} + J_{ez}) \omega_z \omega_y - (J_{\vartheta} + J_{ex}) \dot{\omega}_x = 0.$$

После преобразований получим:

$$B \ddot{\beta} - J_0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta - J_{ey} \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + (J_{\vartheta} + J_{ez}) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - M_x = 0.$$

Окончательно:

$$B \ddot{\beta} - J_0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta - D \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta = M_x, \quad (2.18)$$

где $B = J_{\vartheta} + J_{ex}$; $D = J_{ey} - J_{\vartheta} - J_{ez}$.

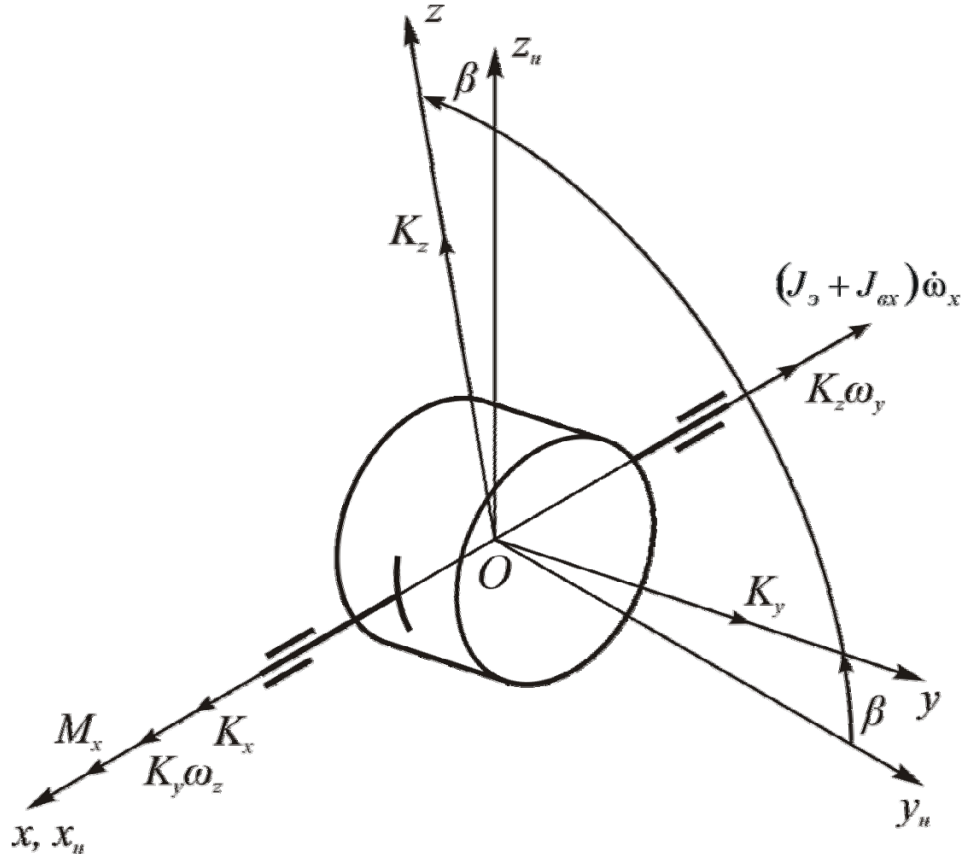


Рис. 2.8. Схема гироскопа и моменты внешних сил и сил инерции

Получим уравнение движения гироскопа относительно оси наружной рамки. На рисунке 2.9 укажем следующие моменты: гироскопические:

$$K_x \omega_y = (J_{\vartheta} + J_{ex}) \omega_x \omega_y; \quad K_y \omega_x = (J_0 \omega_{y_p} + J_{ey} \omega_y) \omega_x; \quad K_z \omega_x = (J_{\vartheta} + J_{ez}) \omega_z \omega_x; \\ K_x \omega_z = (J_{\vartheta} + J_{ex}) \omega_z \omega_x;$$

моменты сил инерции от углового ускорения:

$$(J_{\vartheta} + J_{ez}) \dot{\omega}_z; \quad J_{z_H} \dot{\omega}_{z_H}; \quad J_{ey} \dot{\omega}_y,$$

где $\dot{\omega}_z = \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta$; $\dot{\omega}_y = \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta$; момент реакции со стороны ротора на внутреннюю рамку – M_{y_p} .

На рисунке 2.9 показаны проекции моментов на ось наружной рамки гироскопа. Алгебраическая сумма проекций моментов на ось наружной рамки, приравненная нулю, имеет вид:

$$-J_{z_H} \dot{\omega}_{z_H} - (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \dot{\omega}_z \cos \beta - J_0 \omega_{y_P} \omega_x \cos \beta - J_{\epsilon y} \omega_y \omega_x \cos \beta + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon x}) \omega_x \omega_y \cos \beta + M_{z_H} - M_{y_P} \sin \beta - J_{\epsilon y} \dot{\omega}_y \sin \beta - (J_{\vartheta} + J_{\epsilon x}) \omega_x \omega_z \sin \beta + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \omega_x \omega_z \sin \beta = 0.$$

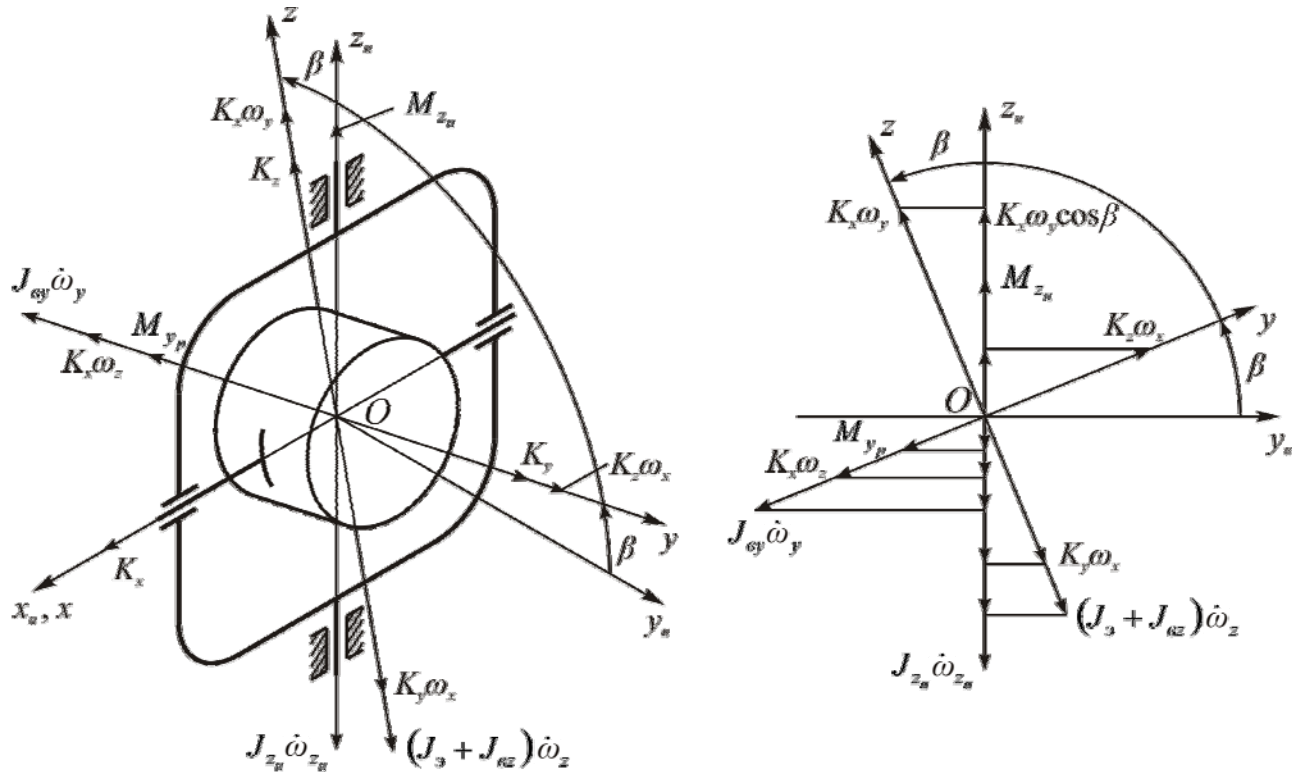


Рис. 2.9. Проекции моментов на ось наружной рамки гироскопа

Подставим выражения для угловых скоростей, получим:

$$\begin{aligned} & -J_{z_H} \ddot{\alpha} - (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \ddot{\alpha} \cos^2 \beta + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - J_0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} \cos \beta - \\ & - J_{\epsilon y} \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon x}) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + M_{z_H} - J_0 \left[\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \right] \sin \beta - \\ & - J_{\epsilon y} \ddot{\alpha} \sin^2 \beta - J_{\epsilon y} \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta - (J_{\vartheta} + J_{\epsilon x}) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

Обозначим: $A(\beta) = J_{z_H} + (J_{\vartheta} + J_{\epsilon z}) \cos^2 \beta + J_{\epsilon y} \sin^2 \beta$, $D = J_{\epsilon y} - J_{\vartheta} - J_{\epsilon z}$.

После преобразований уравнение движения гироскопа относительно оси наружной рамки примет вид:

$$A(\beta) \ddot{\alpha} + J_0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} \cos \beta + 2D \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + J_0 \left[\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \right] \sin \beta = M_{z_H}. \quad (2.19)$$

2.3. Составление уравнений движения гироскопа с помощью уравнений Лагранжа второго рода

Составим уравнения движения трехстепенного астатического гироскопа в кардановом подвесе (рис. 2.10).

Введем следующие системы координат:

$O\xi^*\eta^*\zeta^*$ – инерциальная (на рисунке не показана);

$O\xi\eta\zeta$ – система координат, связанная с подвижным основанием;

$Ox_n y_n z_n$, $Oxyz$, $Ox_p y_p z_p$ – системы координат, связанные с наружной, внутренней рамками и ротором соответственно.

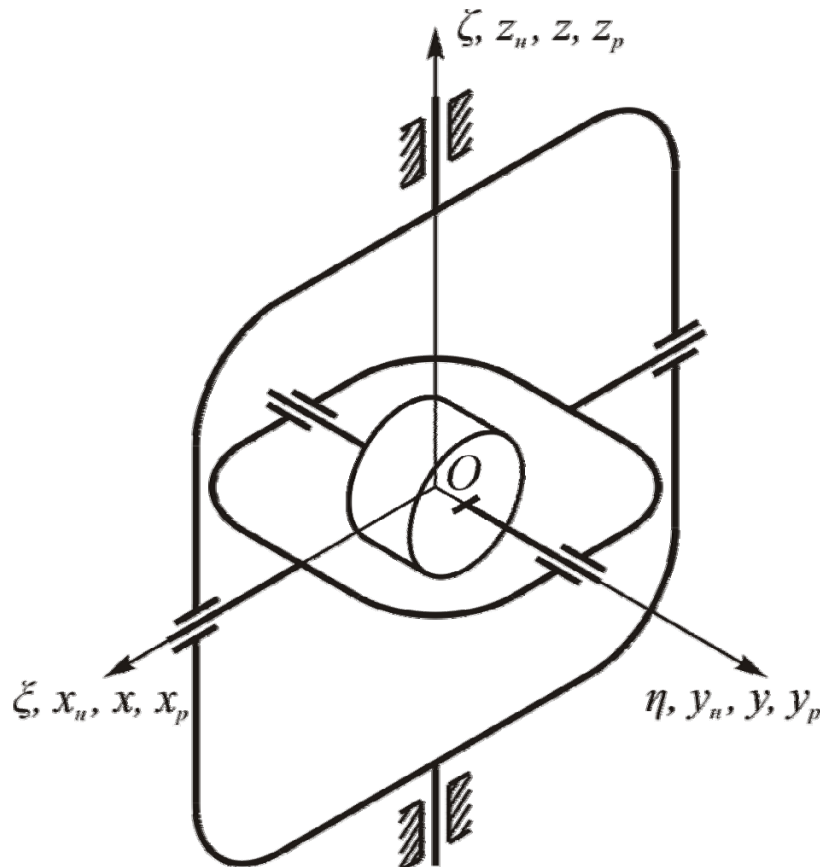


Рис. 2.10. Кинематическая схема гироскопа

Начало всех систем координат расположено в точке O подвеса гироскопа. Система координат $O\xi\eta\zeta$ – базовая. Она вращается относительно инерциальной системы координат с угловой скоростью, проекции которой на ее же оси обозначим ω_ξ , ω_η , ω_ζ . При составлении уравнений движения гироскопа будем учитывать допущения, изложенные в пункте 2.1. Тела, входящие в состав трехстепенного гироскопа и системы координат, связанные с ними, показаны на рисунке 2.11 а), б), в).

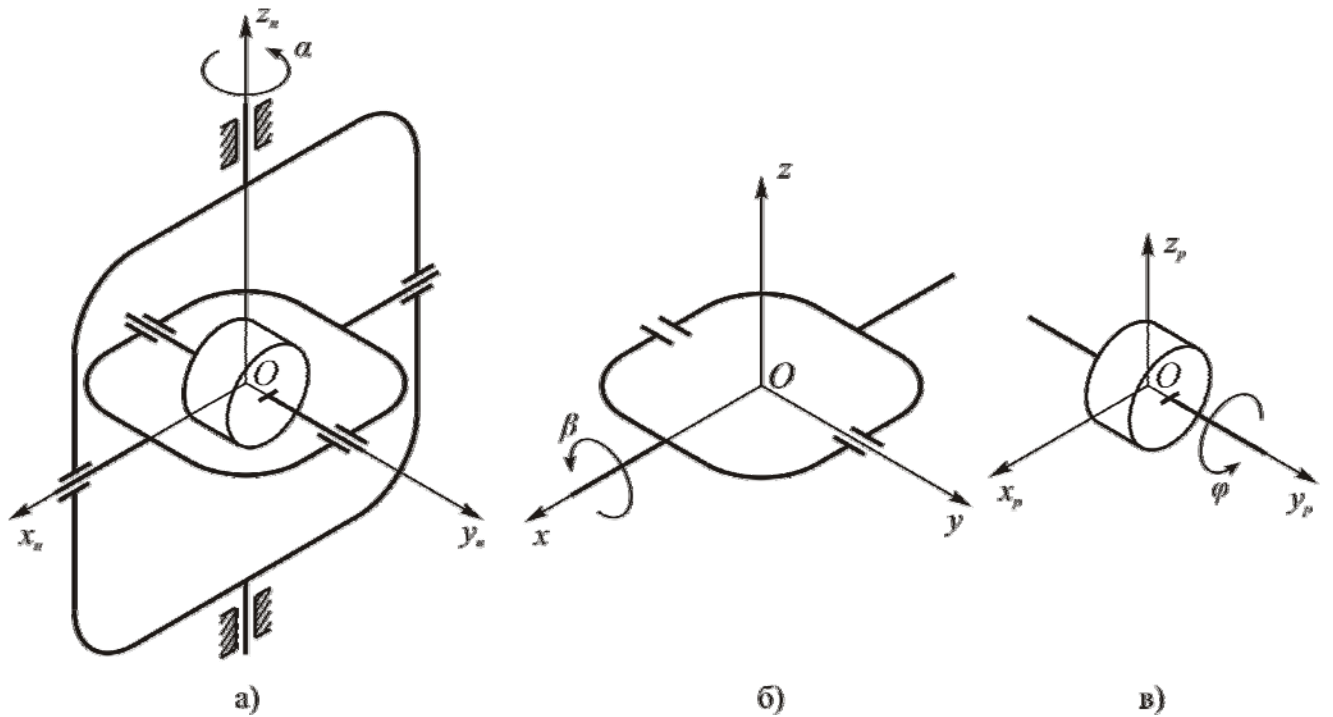


Рис. 2.11. Твердые тела, входящие в состав гироскопа:
 а) наружная рамка; б) внутренняя рамка; в) ротор

Для составления уравнений движения гироскопа воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода, имеющих вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= M_{z_n}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= M_x; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= M_{y_p}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где T – кинетическая энергия гироскопа; α, β, ϕ – обобщенные координаты; $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}$ – обобщенные скорости; M_{z_n}, M_x, M_{y_p} – моменты внешних сил, приложенные к гироскопу относительно осей наружной, внутренней рамок и ротора соответственно (обобщенные силы, соответствующие координатам α, β и ϕ).

Кинетическая энергия гироскопа равна сумме кинетических энергий наружной, внутренней рамок и ротора

$$T = T_n + T_g + T_p. \quad (2.21)$$

Кинетическая энергия наружной рамки

$$T_n = \frac{1}{2} (J_{x_n} \omega_{x_n}^2 + J_{y_n} \omega_{y_n}^2 + J_{z_n} \omega_{z_n}^2), \quad (2.22)$$

где $\omega_{x_n}, \omega_{y_n}, \omega_{z_n}$ – проекции абсолютной угловой скорости наружной рамки на соответствующие оси.

Кинетическая энергия внутренней рамки

$$T_s = \frac{1}{2}(J_{\text{ex}}\omega_x^2 + J_{\text{ey}}\omega_y^2 + J_{\text{ez}}\omega_z^2), \quad (2.23)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции абсолютной угловой скорости внутренней рамки на оси системы координат $Oxyz$.

Кинетическая энергия ротора гироскопа

$$T_p = \frac{1}{2}(J_9\omega_{x_p}^2 + J_9\omega_{z_p}^2 + J_0\omega_{y_p}^2), \quad (2.24)$$

где $\omega_{x_p}, \omega_{y_p}, \omega_{z_p}$ – проекции абсолютной угловой скорости ротора на оси системы координат $Ox_p y_p z_p$.

Для нахождения проекций абсолютных угловых скоростей рассмотрим взаимную ориентацию систем координат, связанных с наружной, внутренней рамками и ротором гироскопа (рис. 2.12).

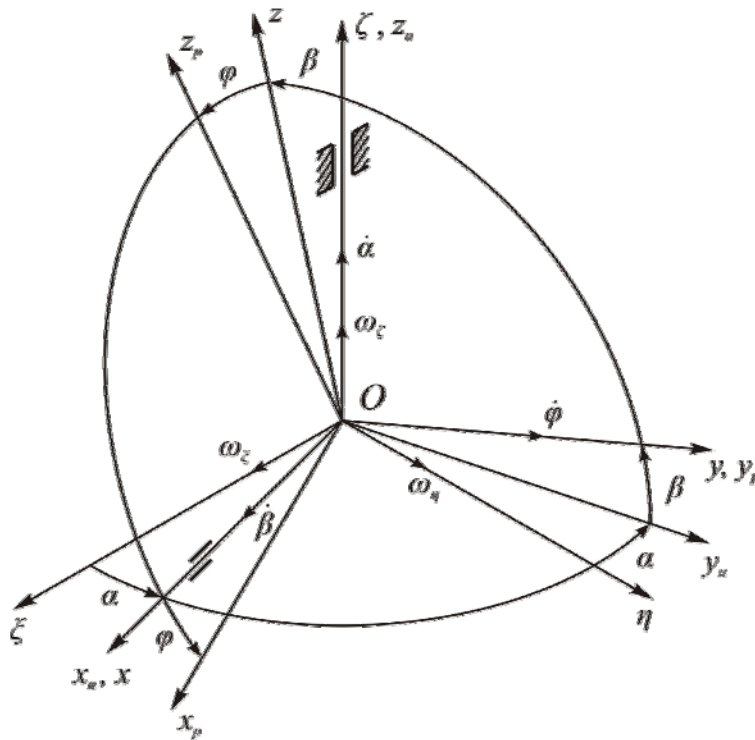


Рис. 2.12. К определению проекций угловых скоростей

Проекция абсолютных угловых скоростей в соответствии с рисунком 2.12 на оси, связанные с наружной рамкой:

$$\begin{aligned} \omega_{x_H} &= \omega_\xi \cos \alpha + \omega_\eta \sin \alpha; \\ \omega_{y_H} &= \omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha; \\ \omega_{z_H} &= \dot{\alpha} + \omega_\zeta, \end{aligned} \quad (2.25)$$

с внутренней рамкой:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\beta} + \omega_{x_H}; \\ \omega_y &= \omega_{y_H} \cos \beta + \omega_{z_H} \sin \beta; \\ \omega_z &= \omega_{z_H} \cos \beta - \omega_{y_H} \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.26)$$

с ротором гироскопа:

$$\begin{aligned}\omega_{x_p} &= \omega_x \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi; \\ \omega_{y_p} &= \dot{\varphi} + \omega_y; \\ \omega_{z_p} &= \omega_z \cos \varphi + \omega_x \sin \varphi.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Подставим выражения для угловых скоростей в (2.21)...(2.24), получим

$$T = \frac{1}{2} J_{x_H} \omega_{x_H}^2 + \frac{1}{2} J_{y_H} \omega_{y_H}^2 + \frac{1}{2} J_{z_H} \omega_{z_H}^2 + \frac{1}{2} J_{ax} \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_{ay} \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_{az} \omega_z^2 + \frac{1}{2} J_{\varphi} (\omega_{x_p}^2 + \omega_{z_p}^2) + \frac{1}{2} J_0 \omega_{y_p}^2. \quad (2.28)$$

Сумму $\omega_{x_p}^2 + \omega_{z_p}^2$ можно представить в виде

$$\omega_{x_p}^2 + \omega_{z_p}^2 = (\omega_x \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi)^2 + (\omega_z \cos \varphi + \omega_x \sin \varphi)^2 = \omega_x^2 + \omega_z^2.$$

С учетом этого выражение для кинетической энергии гироскопа примет вид:

$$T = \frac{1}{2} J_{x_H} \omega_{x_H}^2 + \frac{1}{2} J_{y_H} \omega_{y_H}^2 + \frac{1}{2} J_{z_H} \omega_{z_H}^2 + \frac{1}{2} (J_{\varphi} + J_{ax}) \omega_x^2 + \frac{1}{2} (J_{\varphi} + J_{az}) \omega_z^2 + \frac{1}{2} J_{ay} \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_{y_p}^2. \quad (2.29)$$

Как видим, кинетическая энергия гироскопа является сложной функцией обобщенных координат и скоростей. Найдем необходимые производные.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = J_{x_H} \omega_{x_H} \frac{\partial \omega_{x_H}}{\partial \dot{\alpha}} + J_{y_H} \omega_{y_H} \frac{\partial \omega_{y_H}}{\partial \dot{\alpha}} + J_{z_H} \omega_{z_H} \frac{\partial \omega_{z_H}}{\partial \dot{\alpha}} + (J_{\varphi} + J_{ax}) \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\alpha}} + (J_{\varphi} + J_{az}) \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\alpha}} + J_{ay} \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\alpha}} + J_0 \omega_{y_p} \frac{\partial \omega_{y_p}}{\partial \dot{\alpha}}.$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial \omega_{x_H}}{\partial \dot{\alpha}} = 0; \quad \frac{\partial \omega_{y_H}}{\partial \dot{\alpha}} = 0; \quad \frac{\partial \omega_{z_H}}{\partial \dot{\alpha}} = 1; \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\alpha}} = 0; \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\alpha}} = \sin \beta; \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\alpha}} = \cos \beta; \quad \frac{\partial \omega_{y_p}}{\partial \dot{\alpha}} = \sin \beta,$$

получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = J_{z_H} \omega_{z_H} + (J_{\varphi} + J_{ax}) \omega_z \cos \beta + J_{ay} \omega_y \sin \beta + J_0 \omega_{y_p} \sin \beta. \quad (2.30)$$

Выполнив дифференцирование функции (2.29) по обобщенным скоростям $\dot{\beta}$ и $\dot{\varphi}$, найдем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= (J_{\varphi} + J_{ax}) \omega_x; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= J_0 \omega_{y_p}.\end{aligned}\quad (2.31)$$

При определении производных по обобщенным координатам примем во внимание, что

$$\frac{\partial \omega_{x_H}}{\partial \alpha} = \omega_{\eta} \cos \alpha - \omega_{\xi} \sin \alpha = \omega_{y_H}; \quad \frac{\partial \omega_{y_H}}{\partial \alpha} = -(\omega_{\eta} \sin \alpha + \omega_{\xi} \cos \alpha) = -\omega_{x_H}; \quad \frac{\partial \omega_{z_H}}{\partial \alpha} = 0;$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \alpha} = \omega_{y_H}; \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \alpha} = -\omega_{x_H} \cos \beta; \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial \alpha} = \omega_{x_H} \sin \beta;$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \beta} = 0; \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \beta} = \omega_z; \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial \beta} = -\omega_y;$$

$$\frac{\partial \omega_{y_p}}{\partial \beta} = \omega_z; \quad \frac{\partial \omega_{y_p}}{\partial \varphi} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \alpha} &= (J_{x_H} - J_{y_H})\omega_{x_H}\omega_{y_H} + (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon x})\omega_x\omega_{y_H} + (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon z})\omega_z\omega_{x_H} \sin \beta - J_{\varepsilon y}\omega_y\omega_{x_H} \cos \beta - J_0\omega_{y_p}\omega_{x_H} \cos \beta; \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= (J_{\varepsilon y} - J_{\vartheta} - J_{\varepsilon z})\omega_y\omega_z + J_0\omega_{y_p}\omega_z; \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Подставив выражения (2.30), (2.31) и (2.32), получим:

$$\begin{aligned}J_{z_H}\dot{\omega}_{z_H} + \frac{d}{dt}[(J_{\vartheta} + J_{\varepsilon z})\omega_z \cos \beta + J_{\varepsilon y}\omega_y \sin \beta + J_0\omega_{y_p} \sin \beta] - (J_{x_H} - J_{y_H})\omega_{x_H}\omega_{y_H} - \\ - (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon x})\omega_x\omega_{y_H} - (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon z})\omega_z\omega_{x_H} \sin \beta + J_{\varepsilon y}\omega_y\omega_{x_H} \cos \beta + J_0\omega_{y_p}\omega_{x_H} \cos \beta = M_{z_H}; \\ (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon x})\dot{\omega}_x - (J_{\varepsilon y} - J_{\vartheta} - J_{\varepsilon z})\omega_y\omega_z - J_0\omega_{y_p}\omega_z = M_x; \\ \frac{d}{dt}(J_0\omega_{y_p}) = M_{y_p}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Эти три уравнения являются динамическими уравнениями гироскопа в кардановом подвесе, которые необходимо рассматривать вместе с кинематическими соотношениями (2.25) – (2.27).

Получим теперь, как частный случай, уравнения движения гироскопа на неподвижном основании, то есть при $\omega_{\xi} = \omega_{\eta} = \omega_{\zeta} = 0$.

В этом случае

$$\begin{aligned}\omega_{x_H} = 0; \quad \omega_{y_H} = 0; \quad \omega_{z_H} = \dot{\alpha}; \\ \omega_x = \dot{\beta}; \quad \omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta; \quad \omega_z = \dot{\alpha} \cos \beta; \\ \omega_{y_p} = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Подставим выражения (2.34) в уравнения (2.33), получим:

$$\begin{aligned}A(\beta)\ddot{\alpha} + J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\beta} \cos \beta + 2D\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin \beta + J_0\left[\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\right] \sin \beta = M_{z_H}; \\ B\ddot{\beta} - J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\alpha} \cos \beta - D\dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta = M_x; \\ J_0\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) = M_{y_p},\end{aligned}$$

где
$$A(\beta) = J_{z_H} + (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon z})\cos^2 \beta + J_{\varepsilon y}\sin^2 \beta;$$

$$D = J_{\varepsilon y} - J_{\vartheta} - J_{\varepsilon z}.$$

2.4. Линеаризация уравнений движения гироскопа

Уравнения движения трехстепенного гироскопа имеют вид:

$$\begin{aligned}A(\beta)\ddot{\alpha} + J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\beta} \cos \beta + 2D\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + J_0\left[\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\right] \sin \beta = M_{z_H}; \\ B\ddot{\beta} - J_0(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)\dot{\alpha} \cos \beta - D\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta = M_x; \\ J_0\frac{d}{dt}[\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta] = M_{\delta\sigma} - M_c.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Обратимся к третьему уравнению системы (2.35). Момент относительно оси ротора определяется выражением

$$M_{y_p} = M_{\text{дв}} - M_c,$$

где $M_{\text{дв}}$ – момент движущий, вращающий ротор; $M_c = M_{\text{тр}} + M_{\text{АЭР.СОПР}}$ – момент сопротивления; $M_{\text{тр}}$ – момент трения в опорах ротора; $M_{\text{АЭР.СОПР}}$ – момент аэродинамического сопротивления среды, в которой вращается ротор.

Движущий момент $M_{\text{дв}}$ в электрическом двигателе создается магнитным полем статора, который укреплен на внутренней рамке гироскопа.

В установившемся режиме $M_{\text{дв}} = M_c$. В этом случае угловая скорость ротора $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$. Угловая скорость Ω является номинальной (расчетной) скоростью ротора, необходимой для нормального функционирования гироскопа. Гироскоп готов к работе тогда, когда ротор разогнался до номинальной скорости Ω . Кривые разгона и выбега (остановки) ротора показаны на рисунке 2.13.

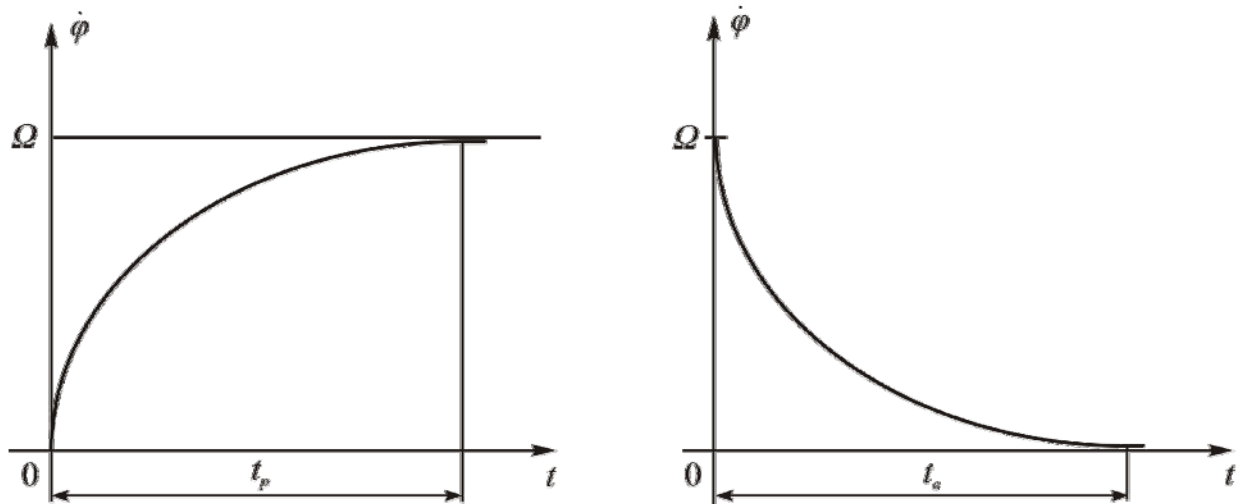


Рис. 2.13. Кривые разгона и выбега ротора гироскопа: t_p - время разгона; t_e - время выбега

Так как $\Omega \gg \dot{\alpha} \sin \beta$, то слагаемое $\dot{\alpha} \sin \beta$ можно опустить ввиду малости по сравнению с Ω . Тогда проекция кинетического момента ротора гироскопа на главную ось будет равна

$$K_{y_p} = J_0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \approx J_0 \dot{\varphi} = J_0 \Omega = H = \text{const},$$

т.е. приближенно равна собственному кинетическому моменту ротора.

Слагаемое $J_0 \left[\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \right] \sin \beta = \frac{dK_{y_p}}{dt} \sin \beta$ в этом случае будет равно нулю. С учетом малости $\dot{\alpha} \sin \beta$ и постоянства угловой скорости ротора в установившемся режиме гироскопа уравнения (2.35) примут вид:

$$\begin{aligned} A(\beta) \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} \cos \beta + 2D \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta &= M_{z_H}; \\ B \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} \cos \beta - D \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta &= M_x; \\ H &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Уравнения (2.36) нелинейны, коэффициент $A(\beta)$ – переменный, зависит от угла β .

Для линеаризации уравнений (2.36) положим, что $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, причем $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. Тригонометрические функции угла β заменяем их разложением в ряд Тейлора в окрестности начального угла β_0 по степеням $\Delta\beta$:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0 - \frac{\Delta\beta^2}{2} \sin \beta_0 - \dots; \\ \cos \beta &= \cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0 - \frac{\Delta\beta^2}{2} \cos \beta_0 + \dots\end{aligned}\quad (2.37)$$

Ограничимся первыми двумя слагаемыми рядов (2.37) при записи функций $\sin^2 \beta$ и $\cos^2 \beta$, получим

$$\begin{aligned}\sin^2 \beta &= \sin^2 \beta_0 + 2\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \Delta\beta^2 \cos^2 \beta_0; \\ \cos^2 \beta &= \cos^2 \beta_0 - 2\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \Delta\beta^2 \sin^2 \beta_0.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Подставим выражение (2.38) в выражение $A(\beta)$, получим

$$\begin{aligned}A(\beta) &= J_{z_H} + (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon_z})[\cos^2 \beta_0 - 2\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \Delta\beta^2 \sin^2 \beta_0] + \\ &+ J_{\varepsilon_y}[\sin^2 \beta_0 + 2\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \Delta\beta^2 \cos^2 \beta_0].\end{aligned}\quad (2.39)$$

Введем обозначение $A(\beta_0) = J_{z_H} + (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon_z}) \cos^2 \beta_0 + J_{\varepsilon_y} \sin^2 \beta_0$.

Первое слагаемое в первом уравнении системы (2.36) представим в виде

$$\begin{aligned}A(\beta)\ddot{\alpha} &= A(\beta_0)\Delta\ddot{\alpha} - 2(J_{\vartheta} + J_{\varepsilon_z})\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 + (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon_z})\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta^2 \sin^2 \beta_0 + \\ &+ 2J_{\varepsilon_y}\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 + J_{\varepsilon_y}\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta^2 \cos^2 \beta_0.\end{aligned}$$

Другие слагаемые в уравнениях системы (2.36) после подстановки выражений (2.37) приобретут вид:

$$\begin{aligned}H\dot{\beta} \cos \beta &= H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 - H\Delta\dot{\beta}\Delta\beta \sin \beta_0; \\ H\dot{\alpha} \cos \beta &= H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 - H\Delta\dot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0; \\ 2D\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta &= 2D\Delta\dot{\alpha}\Delta\dot{\beta}(\sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0)(\cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0); \\ D\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta &= D\Delta\dot{\alpha}^2(\sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0)(\cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0).\end{aligned}$$

Преобразуем уравнения системы (2.36) к виду

$$\begin{aligned}A(\beta_0)\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= M_{z_H} + f_1; \\ B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= M_x + f_2,\end{aligned}\quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned}f_1 &= 2(J_{\vartheta} + J_{\varepsilon_z})\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 - (J_{\vartheta} + J_{\varepsilon_z})\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta^2 \sin^2 \beta_0 - 2J_{\varepsilon_y}\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 - \\ &- J_{\varepsilon_y}\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta^2 \cos^2 \beta_0 + H\Delta\dot{\beta}\Delta\beta \sin \beta_0 - 2DH\Delta\dot{\alpha}\Delta\dot{\beta}(\sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0)(\cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0); \\ f_2 &= -H\Delta\dot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0 + D\Delta\dot{\alpha}^2(\sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0)(\cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0).\end{aligned}\quad (2.41)$$

Выражения f_1 и f_2 содержат нелинейные члены уравнений системы (2.40). Отбрасывая в уравнениях (2.40) члены, определяемые выражениями f_1 и f_2 , ввиду их малости по сравнению с гироскопическими моментами, получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающими движение трехстепенного гироскопа, а именно:

$$\begin{aligned}
 A(\beta_0)\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= M_{z_H}; \\
 B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= M_x.
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

Эти уравнения называются **техническими линейризованными дифференциальными уравнениями движения гироскопа**. Это приближенные уравнения движения. Если в уравнениях (2.42) опустить моменты $A(\beta_0)\Delta\ddot{\alpha}$ и $B\Delta\ddot{\beta}$, то получим

$$\begin{aligned}
 H\Delta\dot{\beta} \cos(\beta_0) &= M_{z_H}; \\
 H\Delta\dot{\alpha} \cos(\beta_0) &= -M_x.
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Уравнения (2.43) называют **прецессионными**, укороченными или усеченными. Это самая простая математическая модель трехстепенного гироскопа. Она описывает только прецессионное движение гироскопа. Пользоваться этими уравнениями можно, если моменты M_{z_H} и M_x постоянны или являются медленно меняющимися функциями.

2.5. Получение технических уравнений движения гироскопа методом кинетостатики

Ранее было изложено правило составления полных уравнений движения гироскопа методом кинетостатики. Этот метод позволяет быстро получить технические уравнения движения гироскопа, которые широко применяются для решения инженерных задач при проектировании giroприборов.

Порядок составления технических уравнений движения.

1. Изображается кинематическая схема гироскопа с заданным расположением его осей (рис. 2.14) и выбираются системы координат:

$O\xi\eta\zeta$ – базовая система координат (инерциальная или связанная с подвижным основанием);

$Ox_Hy_Hz_H$ – система координат связанная с наружной рамкой;

$Oxyz$ – система координат связанная с внутренней рамкой.

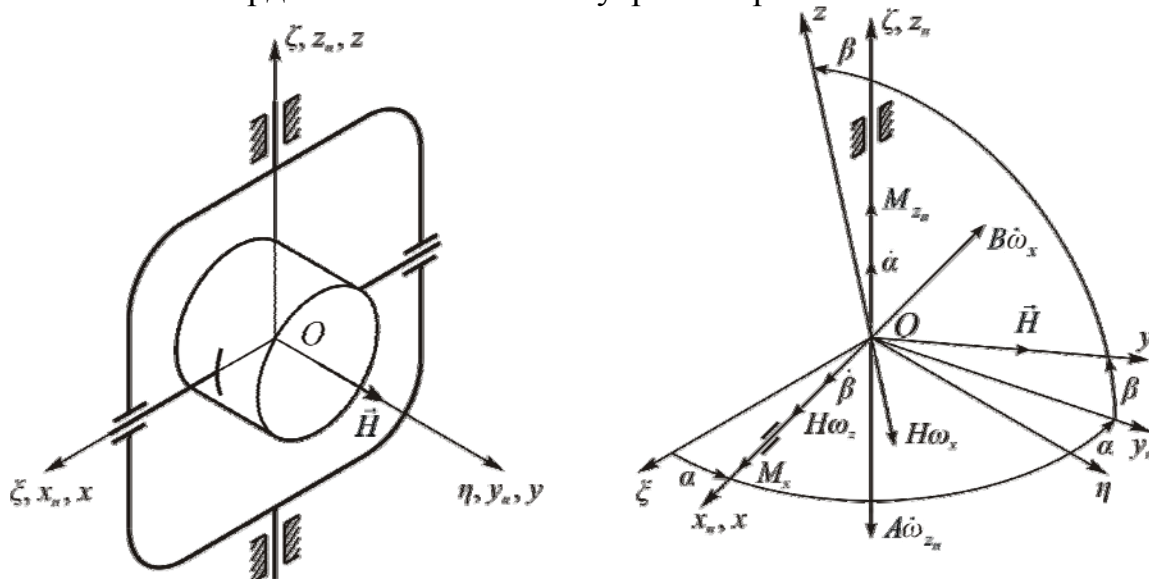


Рис. 2.14. Трехстепенный гироскоп и кинематический чертеж

2. Изображаются выбранные системы координат в рассогласованном положении введением углов Эйлера – Крылова в следующем порядке:

- поворот гироскопа на угол α относительно оси наружной рамки;
- поворот внутренней рамки с ротором на угол β относительно оси внутренней рамки.

Углы α и β считаются положительными, если поворот происходит против хода часовой стрелки и если угловые скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ направлены по положительному направлению осей Oz_H и Ox соответственно.

3. Находятся проекции абсолютной угловой скорости на оси, связанные с наружной и внутренней рамками. Если $O\xi\eta\zeta$ – инерциальная система координат, то

$$\begin{aligned}\omega_{x_H} = \omega_{y_H} = 0; \omega_{z_H} = \dot{\alpha}; \\ \omega_x = \dot{\beta}; \omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta; \omega_z = \dot{\alpha} \cos \beta.\end{aligned}$$

4. На кинематическом чертеже показываются моменты сил инерции и внешние моменты:

$A\dot{\omega}_{z_H}$ – момент сил инерции от углового ускорения наружной рамки;

$B\dot{\omega}_x$ – момент сил инерции от углового ускорения внутренней рамки;

$H\omega_x$ и $H\omega_z$ – гироскопические моменты.

Здесь A – приведенный момент инерции наружной и внутренней рамки с ротором к оси Oz_H ; B – момент инерции внутренней рамки и ротора относительно оси Ox . Векторы внешних моментов в общем случае, пока они не конкретизированы, направляется по направлению положительных осей.

5. Проецируются моменты на оси внутренней и наружной рамок, и их алгебраическая сумма приравняется нулю

$$\begin{aligned}-A\dot{\omega}_{z_H} - H\omega_x \cos \beta + M_{z_H} = 0; \\ -B\dot{\omega}_x + H\omega_z \cos \beta + M_x = 0.\end{aligned}\tag{2.44}$$

После подстановки выражений для угловых скоростей и их производных уравнения (2.44) примут вид:

$$\begin{aligned}A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} \cos \beta = M_{z_H}; \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} \cos \beta = M_x.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Для линеаризации уравнений представим переменные α и β в виде $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, причем $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. Ограничившись первым членом ряда Тейлора, получим:

$$\begin{aligned}A\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 = M_{z_H}; \\ B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 = M_x.\end{aligned}\tag{2.46}$$

2.6. Картинная плоскость

При анализе движения гироскопа в различных режимах работы из уравнений (2.46) определяются переменные, характеризующие движение главной оси (вектора \vec{H}). Этими переменными являются углы $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ и их производные.

Для наглядного представления движения главной оси ротора вводится понятие картинной плоскости [23] (рис. 2.15). Опишем вокруг точки O подвеса гироскопа сферу радиусом OO_1 равным единице длины. В точке O_1 пересечения оси $O\eta$ с единичной сферой проведем плоскость Π касательную к сфере. Плоскость Π называется картинной, или изображающей плоскостью. На картинной плоскости проведем прямые $O_1\Delta\alpha$ и $O_1\Delta\beta$. $O_1\Delta\alpha$ – прямая касательная в точке O_1 к большому кругу сферы лежащему в плоскости $O\xi\eta$, а $O_1\Delta\beta$ – прямая касательная к большому кругу сферы лежащему в плоскости $O\eta\zeta$. Точка A , лежащая на положительном направлении оси Oy гироскопа на расстоянии одной линейной единицы от точки подвеса O , называется **апексом** или вершиной гироскопа. Прямые $O_1\Delta\alpha$ и $O_1\Delta\beta$ образуют прямоугольную систему координат, определяющую положение апекса A гироскопа.

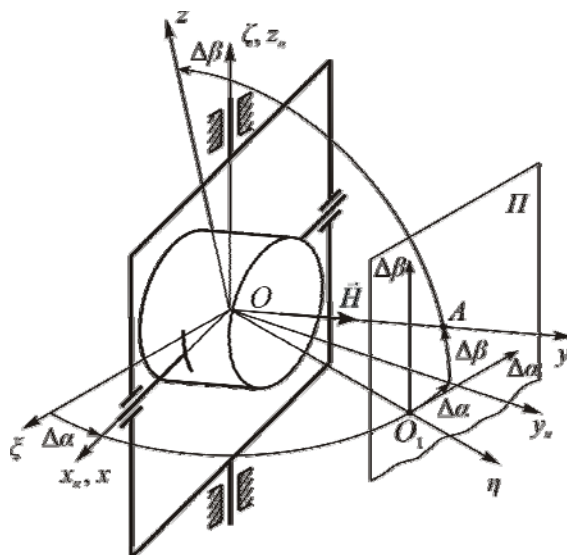


Рис. 2.15. Картинная плоскость

Положение апекса A на картинной плоскости однозначно определяется координатами $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$. При условии малости углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ отклонения главной оси от исходного направления можно рассматривать как линейные перемещения апекса A гироскопа в прямоугольной системе координат $O_1\Delta\alpha\Delta\beta$ на картинной плоскости. Так как картинная плоскость находится на расстоянии единицы длины от неподвижной точки, то угловые скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ численно равны линейным скоростям, которые также могут быть изображены как векторы скорости апекса гироскопа A на картинной плоскости.

Картинная плоскость позволяет использовать результаты аналитического решения уравнений движения для графических построений и толкований движения апекса гироскопа, а значит, и главной оси гироскопа.

2.7. Движение свободного гироскопа по инерции (первое приближение)

Движение по инерции свободного трехстепенного гироскопа может происходить тогда, когда по рамке гироскопа наносится удар, т.е. в начальный момент времени гироскоп приобретает угловую скорость. Начальные скорости ($\Delta\dot{\alpha}_0$ и $\Delta\dot{\beta}_0$) гироскопа могут быть вызваны внезапно приложенным или снятым внешним моментом.

Дифференциальные уравнения движения свободного гироскопа, кинематическая схема которого показана на рисунке 2.15 имеют вид

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta}\cos\beta_0 &= 0; \\ B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha}\cos\beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Пусть гироскоп в начальный момент времени после удара получил следующие скорости и координаты: $t=0$; $\Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0$; $\Delta\dot{\beta}(0) = \Delta\dot{\beta}_0$; $\Delta\alpha(0) = 0$; $\Delta\beta(0) = 0$.

Для понижения порядка дифференциальных уравнений введем новые переменные $x = \Delta\dot{\alpha}$; $y = \Delta\dot{\beta}$ и подставим их в уравнения (2.47), получим

$$\begin{aligned} A\dot{x} + Hy\cos\beta_0 &= 0; \\ B\dot{y} - Hx\cos\beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Из первого уравнения системы (2.48) находим

$$y = -\frac{A}{H\cos\beta_0}\dot{x}; \quad \dot{y} = -\frac{A}{H\cos\beta_0}\ddot{x}.$$

Подставим во второе уравнение системы (2.48), получим

$$\frac{AB}{H\cos\beta_0}\ddot{x} + Hx\cos\beta_0 = 0.$$

Разделив на коэффициент при старшей производной левую и правую части этого уравнения, получим

$$\ddot{x} + \nu^2 x = 0, \quad (2.49)$$

$$\text{где } \nu = \frac{H\cos\beta_0}{\sqrt{AB}}. \quad (2.50)$$

Корни характеристического уравнения $r_{1,2} = \pm i\nu$, где $i = \sqrt{-1}$. В этом случае решение уравнения (2.49) запишется в виде

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t. \quad (2.51)$$

Тогда переменная y может быть представлена выражением

$$y = \frac{A\nu}{H\cos\beta_0}C_1 \sin \nu t - \frac{A\nu}{H\cos\beta_0}C_2 \cos \nu t. \quad (2.52)$$

После интегрирования выражений (2.51) и (2.52) получим

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{C_1}{\nu} \sin \nu t - \frac{C_2}{\nu} \cos \nu t + C_3; \\ \Delta\beta &= -\frac{AC_1}{H\cos\beta_0} \cos \nu t - \frac{AC_2}{H\cos\beta_0} \sin \nu t + C_4. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Подставим начальные условия в выражения (2.53) получим уравнения для нахождения коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\Delta\dot{\alpha}_0 = C_1; \Delta\dot{\beta}_0 = -\frac{A\nu}{H\cos\beta_0}C_2; 0 = -\frac{C_2}{\nu} + C_3; 0 = -\frac{AC_1}{H\cos\beta_0} + C_4.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= \Delta\dot{\alpha}_0; C_2 = -\frac{\Delta\dot{\beta}_0 H \cos\beta_0}{A\nu} = -\Delta\dot{\beta}_0 \sqrt{\frac{B}{A}}; \\ C_3 &= \frac{C_2}{\nu} = -\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}}; C_4 = \frac{A\Delta\dot{\alpha}_0}{H\cos\beta_0} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

С учетом коэффициентов выражения (2.53) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} + \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sin \nu t + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} \cos \nu t; \\ \Delta\beta &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sin \nu t - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \cos \nu t. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Из выражений (2.55) следует, что после удара гироскоп совершает незатухающие колебания, которые называются **нутационными**. Эти колебания являются формой движения свободного гироскопа по инерции. Нутационные колебания это собственные колебания гироскопа как механической системы.

Колебания гироскопа относительно оси наружной и внутренней рамок происходят с частотой ν , которая называется частотой нутационных колебаний. Частота ν пропорциональна кинетическому моменту H и обратно пропорциональна \sqrt{AB} . Частота ν зависит от угла β_0 отклонения главной оси гироскопа от перпендикуляра к оси наружной рамки (оси Oy_n). При $\beta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos\beta_0 = 0$, частота $\nu=0$. Трехстепенный гироскоп превращается в двухстепенный теряя своё основное свойство сохранять неизменным в инерциальном пространстве направление главной оси.

Оценим величину частоты нутационных колебаний. Если предположить что в формуле $\nu = \frac{H\cos\beta_0}{\sqrt{AB}} = \frac{J_0\Omega\cos\beta_0}{\sqrt{AB}}$, $A=B=J_0$, а угол β_0 настолько мал, что $\cos\beta_0=1$, то $\nu \approx \Omega$ [рад/с].

Частота нутационных колебаний имеет порядок угловой скорости ротора гироскопа. Период нутационных колебаний определяется по формуле

$$T_0 = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi \frac{\sqrt{AB}}{H\cos\beta_0}.$$

Частота нутационных колебаний гироскопа одна из главных его динамических характеристик. В гироприборах всегда стремятся увеличить частоту ν , а угол β_0 – сделать близким к нулю. Если параметры гироприбора выбраны так, что $J_0 \cos\beta_0 = \sqrt{AB}$, то тогда $\nu = \Omega$, т.е. наступает резонанс, при котором частота возмущающего момента, создаваемого несбалансированным ротором совпадает с

собственной частотой гироскопа ν . При проектировании giroприборов эти обстоятельства должны учитываться. Ротор гироскопа проходит тщательную динамическую балансировку.

Из выражений (2.55) видно, что амплитуды нутационных колебаний малы, так как в знаменателе выражений, определяющих их, входит частота ν . Видно также, что при ударе по гироскопу главная ось смещается на малые углы, определяемые первыми слагаемыми выражений (2.55).

Найдем уравнение траектории апекса гироскопа на картинной плоскости. Представим выражение (2.55) в виде

$$\begin{aligned} \Delta\alpha + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sin \nu t + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} \cos \nu t; \\ \Delta\beta - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} &= \sqrt{\frac{A}{B}} \left(-\frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \cos \nu t + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} \sin \nu t \right). \end{aligned}$$

Чтобы исключить параметр t возведем в квадрат левые и правые части этих выражений и сложим, получим

$$\left(\Delta\alpha + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} \right)^2 + \left(\Delta\beta - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \right)^2 \frac{B}{A} = \left(\frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \right)^2 + \frac{B}{A} \left(\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \right)^2.$$

Это уравнение приведем к виду

$$\frac{\left(\Delta\alpha + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} \right)^2}{\left(\frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \right)^2 + \frac{B}{A} \left(\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \right)^2} + \frac{\left(\Delta\beta - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \right)^2}{\frac{A}{B} \left(\frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \right)^2} = 1. \quad (2.56)$$

Уравнение (2.56) представляет собой уравнение эллипса, центр которого определяется координатами $\Delta\alpha = -\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}}$; $\Delta\beta = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}}$.

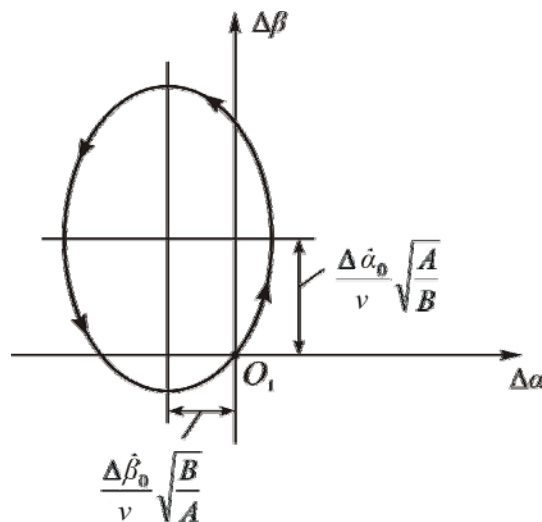


Рис. 2.16. Траектория апекса гироскопа

В процессе нутационных колебаний главная ось гироскопа в кардановом подвесе описывает в пространстве эллиптический конус. При отсутствии кардановых колец ось ротора описывает круглый конус.

Рассмотрим частные случаи:

1. При $t=0$; $\Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0) = 0$; $\Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0$; $\Delta\dot{\beta}(0) = 0$ (рис. 2.17 а)).

Закон изменения углов $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ и уравнение траектории апекса гироскопа принимают вид

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sin \nu t; \\ \Delta\beta &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \cos \nu t; \\ \frac{\Delta\alpha^2}{\left(\frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu}\right)^2} + \frac{\left(\Delta\beta - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2}{\frac{A}{B} \left(\frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu}\right)^2} &= 1.\end{aligned}\quad (2.57)$$

Амплитуды колебаний $\Delta\alpha_a = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu}$; $\Delta\beta_a = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}}$. Координаты центра эллипса

$$\Delta\alpha_u = 0; \Delta\beta_u = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

2. При $t = 0$; $\Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0) = 0$; $\Delta\dot{\alpha}(0) = 0$; $\Delta\dot{\beta}(0) = \Delta\dot{\beta}_0$ (рис. 2.17 б)).

Закон изменения углов $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ и уравнение траектории апекса гироскопа принимают вид

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} \cos \nu t; \\ \Delta\beta &= \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sin \nu t; \\ \frac{\left(\Delta\alpha + \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}}\right)^2}{\frac{B}{A} \left(\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu}\right)^2} + \frac{\Delta\beta^2}{\left(\frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu}\right)^2} &= 1.\end{aligned}\quad (2.58)$$

Амплитуды колебаний $\Delta\alpha_a = \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}}$; $\Delta\beta_a = \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu}$. Координаты центра эллипса

$$\Delta\beta_u = 0; \Delta\alpha_u = \frac{\Delta\dot{\beta}_0}{\nu} \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

3. При $t = 0$; $\Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0) = 0$; $\Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0$; $\Delta\dot{\beta}(0) = 0$; $A=B$ (рис. 2.17 в)).

Закон изменения углов $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ и уравнение траектории апекса гироскопа принимают вид

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sin \nu t; \\ \Delta\beta &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \cos \nu t; \\ \Delta\alpha^2 + \left(\Delta\beta - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \right)^2 &= \left(\frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \right)^2.\end{aligned}\quad (2.59)$$

Амплитуды колебаний $\Delta\alpha_a = \Delta\beta_a = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu}$. При равенстве моментов инерции ($A=B$) траекторией апекса является окружность радиуса $R = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu}$. Координаты центра окружности $\Delta\alpha_y = 0$; $\Delta\beta_y = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu}$.

Если нутационными колебаниями пренебречь, то в соответствии с выражением (2.55) $\Delta\alpha = 0$; $\Delta\beta = 0$, т.е. главная ось свободного гироскопа будет сохранять заданное направление в инерциальном пространстве (с точностью до малых нутационных колебаний).

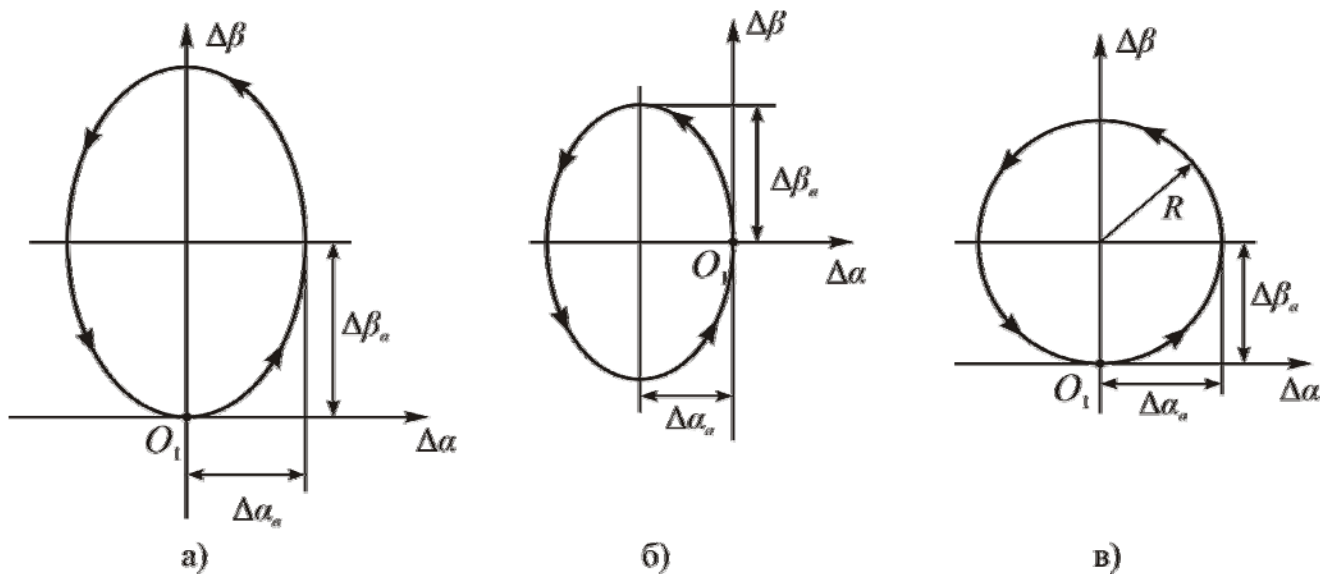


Рис. 2.17. Траектории апекса гироскопа

В реальных гироскопах нутационные колебания быстро затухают из-за наличия сил сопротивления движению в осях карданова подвеса.

Пример. Рассмотрим гироскоп с кинетическим моментом ротора 40 Н·см·с. Электрическое питание асинхронного ротора гироскопа 36 В, 400 Гц, число пар полюсов $P=1$, скольжение $S=5\%$.

1. Скорость вращения поля статора определяется по формуле

$$n = \frac{60f}{P} = \frac{60 \cdot 400}{1} = 24000 \text{ об/мин}; \quad \omega = \frac{\pi}{30} \cdot n = \frac{3.14}{30} \cdot 24000 = 2512 \text{ рад/с.}$$

2. Скорость вращения ротора $\dot{\varphi} = \Omega = \omega(1 - 10^{-2} \cdot S) = 2512 \cdot (1 - 0.05) = 2386,4$ рад/с.

3. Осевой момент инерции ротора

$$J_0 = \frac{H}{\Omega} = \frac{40}{2386,4} = 0,017 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2 = 1,7 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Моменты инерции $A = 0,04 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$, $B = 0,02 \text{ Н} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$.

4. Частота нутационных колебаний $\nu = \frac{H}{\sqrt{AB}} = \frac{40}{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}} = 1413$ рад/с.

5. Амплитуда нутационных колебаний при $\Delta\dot{\alpha}_0 = 0,1$ рад/с.

$$\Delta\alpha_a = \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} = \frac{0,1}{1413} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 0,24'; \quad \Delta\beta_a = \Delta\alpha_a \sqrt{\frac{A}{B}} = 0,24 \cdot \sqrt{2} = 0,34'.$$

6. Период колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{6,28}{1413} = 0,004$ с.

Рассмотренное свободное движение гироскопа в кардановом подвесе представляет собой результат решения дифференциальных уравнений движения гироскопа в первом приближении.

2.8. Движение свободного трехстепенного гироскопа по инерции (решение дифференциальных уравнений движения во втором приближении) [12]

Исследуем движение трехстепенного гироскопа с учетом нелинейных членов.

Исходные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= f_1; \\ B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= f_2; \end{aligned} \quad (2.60)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= 2(J_{\varphi} + J_{\varphi z})\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 - (J_{\varphi} + J_{\varphi z})\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta^2 \sin^2 \beta_0 - 2J_{\varphi y}\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0 \cos \beta_0 - \\ &- J_{\varphi y}\Delta\ddot{\alpha}\Delta\beta^2 \cos \beta_0 - 2D\Delta\dot{\alpha}\Delta\dot{\beta}(\sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0)(\cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0) + H\Delta\dot{\beta}\Delta\beta \sin \beta_0; \\ f_2 &= D\Delta\dot{\alpha}^2(\sin \beta_0 + \Delta\beta \cos \beta_0)(\cos \beta_0 - \Delta\beta \sin \beta_0) - H\Delta\dot{\alpha}\Delta\beta \sin \beta_0. \end{aligned}$$

Подробное рассмотрение движения гироскопа по инерции было основано на решении приближенных линеаризованных уравнений (2.47). Так для начальных условий: $t = 0$; $\Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0) = 0$; $\Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0$; $\Delta\dot{\beta}(0) = 0$ закон изменения углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sin \nu t; \\ \Delta\beta &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} - \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \cos \nu t. \end{aligned}$$

Посмотрим, что изменится в нутационном движении гироскопа, если учесть нелинейные члены. Найдем решение уравнений (2.60) во втором приближении.

Представим углы $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ в виде

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2; \quad \Delta\beta = \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2.$$

Подставим эти выражения в уравнение (2.60), получим

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha}_1 + H\Delta\dot{\beta}_1 \cos \beta_0 &= 0; \\ B\Delta\ddot{\beta}_1 - H\Delta\dot{\alpha}_1 \cos \beta_0 &= 0; \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha}_2 + H\Delta\dot{\beta}_2 \cos \beta_0 &= f_1; \\ B\Delta\ddot{\beta}_2 - H\Delta\dot{\alpha}_2 \cos \beta_0 &= f_2. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Решением уравнений (2.61) для вышеприведенных начальных условий является

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sin \nu t; \\ \Delta\beta_1 &= \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} (1 - \cos \nu t). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Выражения (2.63) являются решением уравнений (2.60) в первом приближении.

Для нахождения решения уравнений (2.62) удержим в правой части этих уравнений члены, содержащие произведение только двух сомножителей: $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\dot{\alpha}$, $\Delta\dot{\beta}$, $\Delta\ddot{\alpha}$, $\Delta\ddot{\beta}$.

Члены более высокого порядка малости опустим и представим f_1 и f_2 в виде

$$\begin{aligned} f_1^* &= 2(J_{\vartheta} + J_{\varepsilon z})\Delta\ddot{\alpha}_1\Delta\beta_1 \sin \beta_0 \cos \beta_0 - 2J_{\varepsilon y}\Delta\ddot{\alpha}_1\Delta\beta_1 \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \\ &+ H\Delta\dot{\beta}_1\Delta\beta_1 \sin \beta_0 - 2D\Delta\dot{\alpha}_1\Delta\dot{\beta}_1 \sin \beta_0 \cos \beta_0; \\ f_2^* &= D\Delta\dot{\alpha}_1^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 - H\Delta\dot{\alpha}_1\Delta\dot{\beta}_1 \sin \beta_0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Подставим в выражения (2.64) решение уравнений движения гироскопа в первом приближении, получим

$$\begin{aligned} f_1^* &= -2(J_{\vartheta} + J_{\varepsilon z})\Delta\dot{\alpha}_0\nu \sin \nu t \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} (1 - \cos \nu t) \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \\ &+ 2J_{\varepsilon y}\Delta\dot{\alpha}_0\nu \sin \nu t \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} (1 - \cos \nu t) \sin \beta_0 \cos \beta_0 + H\Delta\dot{\alpha}_0 \sqrt{\frac{A}{B}} \sin \nu t \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} (1 - \cos \nu t) \sin \beta_0 - \\ &- 2D\Delta\dot{\alpha}_0 \cos \nu t \Delta\dot{\alpha}_0 \sqrt{\frac{A}{B}} \sin \nu t \sin \beta_0 \cos \beta_0; \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$f_2^* = D\Delta\dot{\alpha}_0^2 \cos^2 \nu t \sin \beta_0 \cos \beta_0 - H\Delta\dot{\alpha}_0 \cos \nu t \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \sin \beta_0 + H\Delta\dot{\alpha}_0 \cos^2 \nu t \frac{\Delta\dot{\alpha}_0}{\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \sin \beta_0.$$

В выражении f_1^* все слагаемые периодические функции времени, изменяющиеся с частотой ν и 2ν . В выражении f_2^* периодической функцией времени является только второе слагаемое, а первое и третье содержит постоянную составляющую ($\cos^2 \nu t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\nu t$).

Решение неоднородных дифференциальных уравнений (2.62) состоит из полного решения однородных уравнений и частного решения неоднородных. Так как в f_1^* не содержится постоянной составляющей, то частное решение будет периодической функцией времени. Частное решение, обусловленное постоянной составляющей правых частей уравнений (2.62), имеет вид

$$\langle \Delta \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{\langle f_2^* \rangle}{H \cos \beta_0}; \quad \langle \Delta \dot{\beta}_2 \rangle = \frac{\langle f_1^* \rangle}{H \cos \beta_0} = 0. \quad (2.66)$$

Угловые скобки означают осреднение функцией по времени. Периодическим членам в выражении (2.65) соответствуют частные решения системы (2.62), содержащие $\sin \nu t$, $\cos \nu t$, $t \sin \nu t$, $t \cos \nu t$, $\sin 2\nu t$, $\cos 2\nu t$. Вековые члены $t \sin \nu t$ и $t \cos \nu t$ не свидетельствуют о неустойчивости решения, они появляются в результате применения метода последовательных приближений. Они показывают, что решение верно на ограниченном интервале времени. В этом недостаток метода последовательных приближений.

Можно подойти к изучению влияния нелинейных членов на гироскоп по-другому. Отбросим в уравнениях (2.62) инерционные члены $A\Delta\ddot{\alpha}_2$ и $B\Delta\ddot{\beta}_2$, получим

$$\begin{aligned} H\Delta\dot{\beta}_2 \cos \beta_0 &= f_1^*; \\ -H\Delta\dot{\alpha}_2 \cos \beta_0 &= f_2^*. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Прецессионные уравнения (2.67) представим через осредненные по времени функции, а именно

$$\begin{aligned} H\langle \Delta \dot{\beta}_2 \rangle \cos \beta_0 &= \langle f_1^* \rangle; \\ -H\langle \Delta \dot{\alpha}_2 \rangle \cos \beta_0 &= \langle f_2^* \rangle. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \langle \Delta \dot{\beta}_2 \rangle &= \frac{\langle f_1^* \rangle}{H \cos \beta_0} = 0; \\ \langle \Delta \dot{\alpha}_2 \rangle &= \frac{\langle f_2^* \rangle}{H \cos \beta_0}. \end{aligned}$$

Преобразуем $\langle f_2^* \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle f_2^* \rangle &= \frac{1}{2}(J_{\epsilon y} - J_{\epsilon z} - J_{\epsilon x})\Delta\dot{\alpha}_0^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\dot{\alpha}_0^2}{\cos \beta_0} A \sin \beta_0; \\ \langle f_2^* \rangle &= \frac{1}{2} \Delta\dot{\alpha}_0^2 \sin \beta_0 \left[J_{\epsilon y} \cos \beta_0 - (J_{\epsilon z} + J_{\epsilon x}) \cos \beta_0 + \frac{J_{zH}}{\cos \beta_0} + (J_{\epsilon z} + J_{\epsilon x}) \cos \beta_0 + \frac{J_{\epsilon y} \sin^2 \beta_0}{\cos \beta_0} \right]. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\langle f_2^* \rangle = \frac{1}{2} \frac{\Delta\dot{\alpha}_0^2 \sin \beta_0}{\cos \beta_0} (J_{zH} + J_{\epsilon y}). \quad (2.69)$$

Тогда

$$\langle \Delta \dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\Delta\dot{\alpha}_0^2 \sin \beta_0}{H \cos^2 \beta_0} (J_{zH} + J_{\epsilon y}). \quad (2.70)$$

Таким образом, трехстепенный свободный гироскоп в кардановом подвесе после удара по наружной рамке совершает незатухающие колебания с частотой ν и малые периодические движения с частотой 2ν .

Наряду с этим, в случае когда главная ось не перпендикулярна оси наружной рамки ($\beta_0 \neq 0$), наблюдается медленная прецессия, уход гироскопа вокруг оси наружной рамки с угловой скоростью, определяемой по формуле (2.70). Это явление впервые обнаружил немецкий ученый Магнус. Формула (2.70) названа его именем: **формула Магнуса** (уход Магнуса).

Трехстепенный астатический гироскоп в кардановом подвесе нельзя считать свободным от действия внешних сил при $M_{z_H} = M_x = 0$. На гироскоп могут передаваться моменты сил реакции в подшипниках наружной рамки, векторы которых перпендикулярны оси наружной рамки.

Средняя скорость ухода гироскопа по формуле Магнуса пропорциональна $\Delta\dot{\alpha}_0^2$ и сумме моментов инерции относительно осей наружной и внутренней рамок ($J_{z_H} + J_{\epsilon_y}$). Уход гироскопа равен нулю при $\beta_0 = 0$ или $J_{z_H} = J_{\epsilon_y} = 0$. Такого рода уход отсутствует в гироскопе без карданова подвеса. В гироскопических приборах стремятся поддерживать угол β_0 близкий к нулю.

Пример. Определить среднюю скорость ухода $\langle \Delta\dot{\alpha}_2 \rangle$ гироскопа при следующих данных: $H=40$ Н·см·с; $\Delta\dot{\alpha}_0 = 0,1$ 1/с; $\beta_0 = 5^\circ$; $J_{z_H} = 0,02$ Н·см·с²; $J_{\epsilon_y} = 0,01$ Н·см·с².

$$\langle \Delta\dot{\alpha}_2 \rangle = \frac{(0,1)^2 0,09}{2 \cdot 40 \cdot (0,996)^2} (0,02 + 0,01) = 0,07 \text{ } ^\circ/\text{ч.}$$

Так как в реальных гироскопах нутационные колебания быстро затухают, то уход Магнуса не представляет опасности для giroприборов.

2.9. Движение гироскопа под действием постоянных внешних моментов

Изучение поведения гироскопа под действием постоянных или медленно меняющихся моментов представляет интерес для прикладной гироскопии в случаях, когда искусственно вызывают прецессию гироскопа относительно инерциального пространства, например, для того, чтобы гироскоп сохранял положение главной оси неизменным относительно земного направления, чтобы гироскоп прецессировал по заданной программе, тогда объект, отслеживая движение гироскопа, будет перемещаться по программной траектории. Из-за несовершенства изготовления, сборки и регулировки прибора на гироскоп действуют моменты сил статического небаланса, моменты трения и т.д. В этом случае важно знать, каким будет движение гироскопа, что позволит оценить его точность.

Рассмотрим поведение гироскопа под действием постоянного момента M_x , приложенного к оси внутренней рамки. Дифференциальные уравнения движения гироскопа в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= 0; \\ B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= M_x, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где M_x – постоянный внешний момент.

Решим уравнения при нулевых начальных условиях, а именно: $t = 0$; $\Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0) = 0$; $\Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\beta}(0) = 0$. Из первого уравнения находим

$$\Delta\dot{\beta} = -\frac{A}{H \cos \beta_0} \Delta\ddot{\alpha}. \quad (2.72)$$

Продифференцировав выражение (2.72) и подставив во второе уравнение системы (2.71), получим:

$$\frac{AB}{H \cos \beta_0} \Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 = -M_x. \quad (2.73)$$

Разделив левую и правую часть уравнения (2.73) на коэффициент при старшей производной, получим

$$\ddot{\alpha} + \nu^2 \dot{\alpha} = -\nu^2 \frac{M_x}{H \cos \beta_0}, \quad (2.74)$$

где $\nu = \frac{H \cos \beta_0}{\sqrt{AB}}$ – частота нутационных колебаний.

Уравнение (2.74) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение его равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\Delta\alpha = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + C_3. \quad (2.75)$$

Частное решение неоднородного уравнения (2.74)

$$\Delta\alpha_q = -\frac{M_x}{H \cos \beta_0} t.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (2.74) запишется в виде:

$$\Delta\alpha = -\frac{M_x}{H \cos \beta_0} t + C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + C_3. \quad (2.76)$$

Подставив выражение (2.76) в равенство (2.72) и проинтегрировав, получим

$$\Delta\beta = \sqrt{\frac{A}{B}} (C_1 \sin \nu t - C_2 \cos \nu t) + C_4. \quad (2.77)$$

После подстановки начальных условий в выражения (2.76) и (2.77) получим следующие уравнения для нахождения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 + C_3 = 0; \quad C_2 \nu - \frac{M_x}{H \cos \beta_0} = 0; \quad C_4 - C_2 \sqrt{\frac{A}{B}} = 0; \quad C_1 \sqrt{\frac{A}{B}} = 0.$$

Отсюда находим:

$$C_1 = C_3 = 0; \quad C_2 = \frac{M_x}{\nu H \cos \beta_0}; \quad C_4 = \frac{M_x}{\nu H \cos \beta_0} \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

С учетом постоянных интегрирования выражения для углов $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ примут вид

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -\frac{M_x}{H \cos \beta_0} t + \frac{M_x}{\nu H \cos \beta_0} \sin \nu t; \\ \Delta\beta &= \frac{M_x}{\nu H \cos \beta_0} \sqrt{\frac{A}{B}} (1 - \cos \nu t).\end{aligned}\tag{2.78}$$

Формулами (2.78) описывается движение главной оси гироскопа под действием постоянного момента M_x .

При действии постоянного момента по оси внутренней рамки карданова подвеса гироскоп совершает равномерное вращение относительно оси наружной рамки с угловой скоростью $\frac{M_x}{H \cos \beta_0}$ (рис. 2.18).

Это движение – **прецессия гироскопа**, вызываемая моментом M_x . На прецессионное движение накладываются нутационные колебания, изменяющиеся по синусоиде. Внутренняя рамка гироскопа под действием момента M_x смещается от начального положения на небольшой угол и совершает нутационные колебания с частотой ν по синусоиде. При больших кинетических моментах и угле β_0 , отличном от $\frac{\pi}{2}$, частота ν будет большой, а амплитуда настолько мала, что в рассматриваемом случае движение гироскопа в первом приближении может быть представлено как прецессия гироскопа со скоростью $\frac{M_x}{H \cos \beta_0}$.

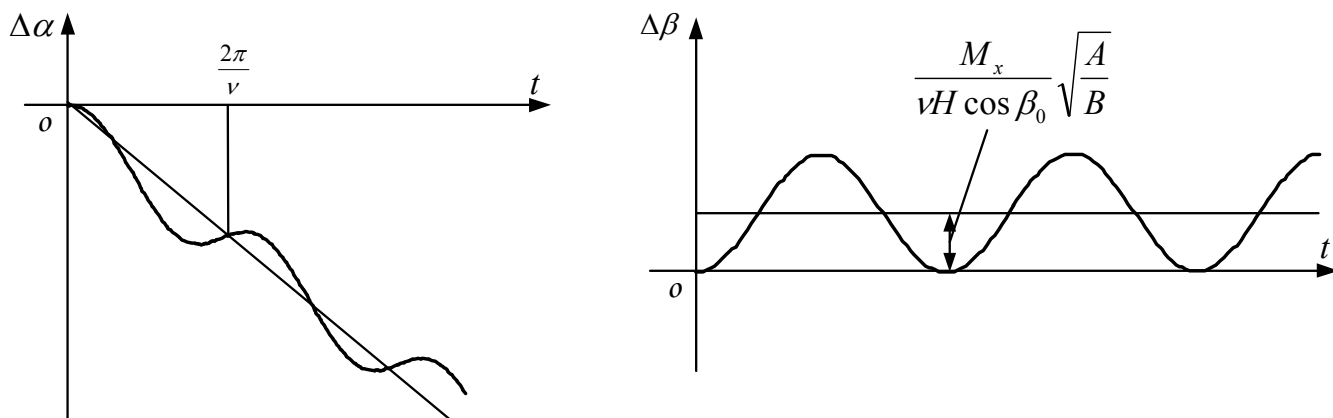


Рис. 2.18. Движение гироскопа под действием постоянного внешнего момента

Прецессионное движение гироскопа, сопровождаемое нутационными колебаниями, называется **псевдорегулярной прецессией**. При наблюдении за движением гироскопа, наблюдатель не замечает нутационных колебаний, видит только прецессию.

Таким образом, с точностью до нутационных колебаний рассматриваемое движение гироскопа можно описать формулами:

$$\Delta\alpha = \frac{M_x}{H \cos \beta_0} t; \Delta\beta_0 = 0. \quad (2.79)$$

Это означает, что с достаточной для практики точностью движение гироскопа можно описывать прецессионными уравнениями вида

$$\begin{aligned} H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= 0; \\ H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= -M_x. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Прецессионные уравнения (2.80) можно получить из исходных (2.71), если в них не учитывать моменты сил инерции, обусловленные угловым ускорением ($A\Delta\ddot{\alpha}$ и $B\Delta\ddot{\beta}$), которые определяют нутационные колебания.

Если момент M_x является медленно меняющейся функцией времени по сравнению с нутационными колебаниями то можно считать, что в течение периода нутации он постоянен. В этом случае можно для анализа движения гироскопа пользоваться прецессионными уравнениями:

$$\begin{aligned} H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= M_{z_H}(t); \\ H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= -M_x(t). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Из выражений (2.78) следует, что своего среднего значения угловая скорость прецессии достигает не мгновенно, а за некоторый промежуток времени, соизмеримый с периодом нутации. Так как период нутации мал (сотые или тысячные доли секунды), то при визуальном наблюдении кажется, что равномерная прецессия возникает мгновенно.

Пример. Рассмотрим гироскоп с параметрами: $H=40$ Н·см·с; $\nu=1413$ с⁻¹; $\beta_0 = 0$; $M_x=0,05$ Н·см.

Амплитуда колебаний

$$\Delta\alpha_a = \frac{M_x}{\nu H \cos \beta_0} = \frac{0,05}{1413 \cdot 40 \cdot 1} = 8,85 \cdot 10^{-7} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ.$$

Скорость прецессии

$$\Delta\dot{\alpha} = \frac{M_x}{H \cos \beta_0} = \frac{0,05}{40 \cdot 1} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с} = 258 \text{ } ^\circ/\text{ч}.$$

Амплитуда

$$\Delta\beta_a = \sqrt{\frac{A}{B}} \Delta\alpha_a,$$

т.е. больше амплитуды $\Delta\alpha_a$ в $\sqrt{\frac{A}{B}}$ раз.

2.10. Движение гироскопа под действием периодически изменяющегося момента

Рассмотрим движение гироскопа под действием момента, приложенного к оси наружной рамки. Пусть момент изменяется по закону $M_{z_H} = M_{10} \sin \omega t$.

Технические линеаризованные уравнения движения гироскопа для этого случая имеют вид

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= M_{10} \sin \omega t; \\ B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Решим эти уравнения при нулевых начальных условиях:

$$t = 0; \Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0) = 0; \Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\beta}(0) = 0.$$

Введем новые переменные $x = \Delta\dot{\alpha}$; $y = \Delta\dot{\beta}$ и подставим их в уравнения (2.82), получим

$$\begin{aligned} Ax + Hy \cos \beta_0 &= M_{10} \sin \omega t; \\ By - Hx \cos \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Из второго уравнения системы (2.83) находим

$$x = \frac{B}{H \cos \beta_0} \dot{y}; \quad \dot{x} = \frac{B}{H \cos \beta_0} \ddot{y}$$

и, подставив в первое уравнение, приведем его к виду

$$\ddot{y} + \nu^2 y = \nu^2 \frac{M_{10}}{H \cos \beta_0} \sin \omega t. \quad (2.84)$$

Частное решение уравнения (2.84) будем находить в форме

$$\bar{y} = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t. \quad (2.85)$$

Найдем производные

$$\dot{\bar{y}} = D_1 \omega \cos \omega t - D_2 \omega \sin \omega t; \quad \ddot{\bar{y}} = -D_1 \omega^2 \sin \omega t - D_2 \omega^2 \cos \omega t$$

и после подстановки в уравнение (2.84), получим

$$-D_1 \omega^2 \sin \omega t - D_2 \omega^2 \cos \omega t + \nu^2 D_1 \sin \omega t + \nu^2 D_2 \cos \omega t = \nu^2 \frac{M_{10}}{H \cos \beta_0} \sin \omega t.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим уравнения для определения коэффициентов D_1 и D_2 :

$$-D_2 \omega^2 + \nu^2 D_2 = 0; \quad (\nu^2 - \omega^2) D_1 = \nu^2 \frac{M_{10}}{H \cos \beta_0}.$$

Отсюда $D_2 = 0$; $D_1 = \frac{\nu^2}{\nu^2 - \omega^2} \frac{M_{10}}{H \cos \beta_0}$.

Частное решение, таким образом, имеет вид

$$\bar{y} = D_1 \sin \omega t.$$

Полное решение дифференциального уравнения (2.84) запишем в виде

$$y = C_1 \sin \nu t + C_2 \cos \nu t + D_1 \sin \omega t.$$

Тогда

$$x = \frac{B}{H \cos \beta_0} C_1 \nu \cos \nu t - \frac{B}{H \cos \beta_0} C_2 \nu \sin \nu t + \frac{B}{H \cos \beta_0} D_1 \omega \cos \omega t. \quad (2.86)$$

Проинтегрировав выражения (2.85) и (2.86), получим

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{B}{H \cos \beta_0} C_1 \sin \nu t + \frac{B}{H \cos \beta_0} C_2 \cos \nu t + \frac{B}{H \cos \beta_0} D_1 \sin \omega t + C_4; \\ \Delta\beta &= -\frac{C_1}{\nu} \cos \nu t + \frac{C_2}{\nu} \sin \nu t - \frac{D_1}{\omega} \cos \omega t + C_3. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Подставим в (2.87) нулевые начальные условия, получим

$$C_3 - \frac{C_1}{\nu} - \frac{D_1}{\omega} = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_4 + \frac{BC_2}{H \cos \beta_0} = 0; \quad \frac{BC_1}{H \cos \beta_0} \nu + \frac{BD_1}{H \cos \beta_0} \omega = 0.$$

Отсюда $C_2 = 0$; $C_4 = 0$; $C_1 = -\frac{D_1 \omega}{\nu}$; $C_3 = D_1 \frac{\nu^2 - \omega^2}{\nu^2 \omega}$.

После подстановки коэффициентов в выражения (2.87) они принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\frac{BD_1}{H \cos \beta_0} \frac{\omega}{\nu} \sin \nu t + \frac{B}{H \cos \beta_0} D_1 \sin \omega t; \\ \Delta\beta &= \frac{D_1 \omega}{\nu^2} \cos \nu t - \frac{D_1}{\omega} \cos \omega t + \frac{M_{10}}{\omega H \cos \beta_0}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Полученные решения показывают, что по координатам $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ гироскоп совершает колебания. Члены с $\sin \nu t$ и $\cos \nu t$ характеризуют нутационные колебания с частотой ν . Члены с $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ характеризуют вынужденные колебания, обусловленные внешним гармоническим моментом $M_{10} \sin \omega t$.

Амплитуды вынужденных и нутационных колебаний гироскопа относительно оси внутренней рамки определяются по выражениям

$$\begin{aligned} \Delta\beta_a(\omega) &= \frac{D_1}{\omega}; \\ \Delta\beta_a(\nu) &= \frac{D_1 \omega}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Отношение амплитуд

$$\frac{\Delta\beta_a(\omega)}{\Delta\beta_a(\nu)} = \frac{\nu^2}{\omega^2}.$$

Так как $\nu \gg \omega$, то $\frac{\Delta\beta_a(\omega)}{\Delta\beta_a(\nu)} \gg 1$.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний внутренней рамки гироскопа от частоты ω приведена на рисунке 2.19. Если частота $\omega \ll \nu$, то влияние переменного возмущающего момента действующего на гироскоп можно исследовать с помощью прецессионных уравнений движения.

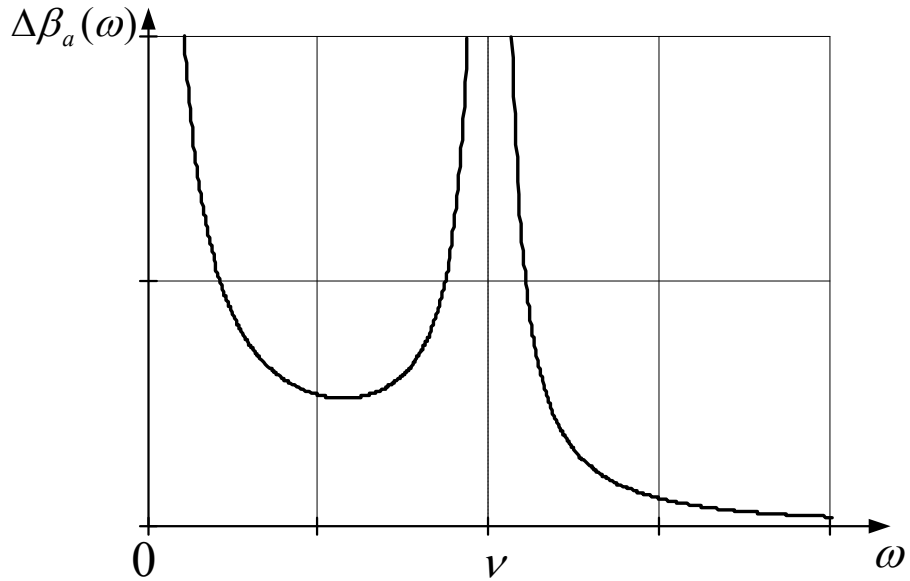


Рис. 2.19. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний

Для рассматриваемого случая прецессионные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= M_{10} \sin \omega t; \\ H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Из первого уравнения системы (2.89) находим

$$\Delta\dot{\beta} = \frac{M_{10}}{H \cos \beta_0} \sin \omega t.$$

После интегрирования, при нулевых начальных условиях, получим:

$$\Delta\beta = -\frac{M_{10}}{\omega H \cos \beta_0} \cos \omega t.$$

Это выражение совпадает с выражением для угла $\Delta\beta$, полученным из (2.88) при неучете слагаемых, обусловленных нутацией гироскопа.

Отношение амплитуды вынужденных колебаний наружной рамки к амплитуде вынужденных колебаний внутренней рамки будет

$$\frac{\Delta\alpha_a(\omega)}{\Delta\beta_a(\omega)} = \frac{BD_1\omega}{D_1H \cos \beta_0} = \frac{B\omega}{H \cos \beta_0}.$$

Это отношение значительно меньше единицы.

Таким образом, при воздействии на гироскоп по оси наружной рамки моментом $M_{10} \sin \omega t$ гироскоп совершает вынужденные колебания с частотой ω относительно двух осей.

Амплитуда вынужденных колебаний гироскопа относительно оси, по которой приложен момент (ось наружной рамки) значительно меньше амплитуды его колебаний относительно оси внутренней рамки, т.е. $\Delta\alpha_a(\omega) \ll \Delta\beta_a(\omega)$. Колебания сдвинуты по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$.

Пример: для гироскопа с данными $H = 40 \text{ Н}\cdot\text{см}\cdot\text{с}$; $A = 0,04 \text{ Н}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2$;

$$B = 0,02 \text{ Н}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2; M_{10} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{см};$$

$$\nu = 1413 \text{ с}^{-1}; \omega = 1,2 \text{ с}^{-1}; \beta_0 = 0; \Delta\beta_a(\omega) = 4,29^\circ; \Delta\alpha_a(\omega) = 2,6 \cdot 10^{-3}^\circ.$$

2.11. Влияние моментов сил трения на движение гироскопа

Сила трения сложным образом зависит от вида и состояния трущихся поверхностей, контактного давления, вида и состояния смазки и других причин, а также от характера изменения нагрузки создающей контактное давление и относительной скорости движения соприкасающихся тел. При расчете моментов сил трения все факторы учесть невозможно. Однако моменты сил трения существенно влияют на движение гироскопа, и пренебрегать ими во многих случаях недопустимо.

При исследовании влияния моментов сил трения на движение гироскопа будем полагать [23]:

– момент трения в подшипниках рамок карданова подвеса гироскопа действует в направлении противоположном относительной угловой скорости соприкасающихся деталей;

– величина момента трения, в первом приближении, пропорциональна нагрузке.

Различают сухое и вязкое трение. Момент сухого трения определяется выражением

$$M_{mp} = M \text{ sign } \dot{\alpha},$$

где $\text{sign } \dot{\alpha} = -1$ при $\dot{\alpha} > 0$; и $\text{sign } \dot{\alpha} = 1$ при $\dot{\alpha} < 0$; $\dot{\alpha}$ – относительная угловая скорость.

Зависимость момента сухого трения от относительной угловой скорости изображена на рисунке 2.20.

Момент вязкого трения направлен против относительной угловой скорости соприкасающихся тел. Величина момента трения пропорциональна относительной угловой скорости: $M_{mp} = K_\delta \dot{\alpha}$, где K_δ – коэффициент пропорциональности.

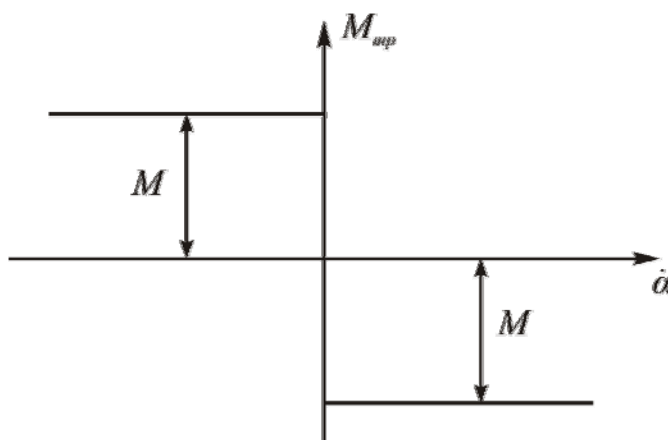


Рис. 2.20. Зависимость момента сухого трения от относительной угловой скорости $\dot{\alpha}$

Вредное влияние сухого трения в подшипниках осей карданова подвеса, например, проявляется в том, что в процессе статической балансировки гироскопа вокруг осей его карданова подвеса невозможно обнаружить и, следовательно, устранить момент остаточной несбалансированности, меньший момента сухого трения в подшипниках соответствующей оси. Моменты остаточной несбалансированности гироскопа нельзя также устранить, так как в процессе балансировки гироскопа их трудно отличить от моментов, порождаемых нежесткостью подшипников и моментов, создаваемых токоподводами и другими причинами. При этом практически не существует идеального астатического гироскопа.

Центр тяжести реального гироскопа не совпадает с точкой подвеса. По этой причине относительно осей карданова подвеса появляются внешние моменты, порождаемые силами тяжести и инерционными силами при движении основания гироскопа с ускорением.

2.11.1. Влияние моментов вязкого трения на движение трехстепенного гироскопа

Составим технические уравнения движения гироскопа с учетом моментов вязкого трения в осях подвеса внутренней и наружной рамок. На рисунке 2.21 изображена кинематическая схема гироскопа и кинематический чертеж, на котором показаны моменты, действующие на гироскоп.

На этом рисунке:

$O\xi\eta\zeta$ – инерциальная система координат;

$Ox_H y_H z_H$ – система координат связанная с наружной рамкой;

$Oxyz$ – система координат связанная с внутренней рамкой.

Проекции угловой скорости гироскопа на оси, связанные с наружной и внутренней рамками:

$$\begin{aligned}\omega_{x_H} = \omega_{y_H} = 0; \omega_{z_H} = \dot{\alpha}; \\ \omega_x = \dot{\beta}; \omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta; \omega_z = \dot{\alpha} \cos \beta.\end{aligned}$$

На кинематическом чертеже показаны следующие моменты:

M_x, M_{z_H} – внешние моменты;

$B\dot{\omega}_x, B\dot{\omega}_{z_H}$ – моменты сил инерции от углового ускорения;

$H\omega_x, H\omega_{z_H}$ – гироскопические моменты;

$K_{01}\dot{\alpha}, K_{02}\dot{\beta}$ – моменты вязкого трения.

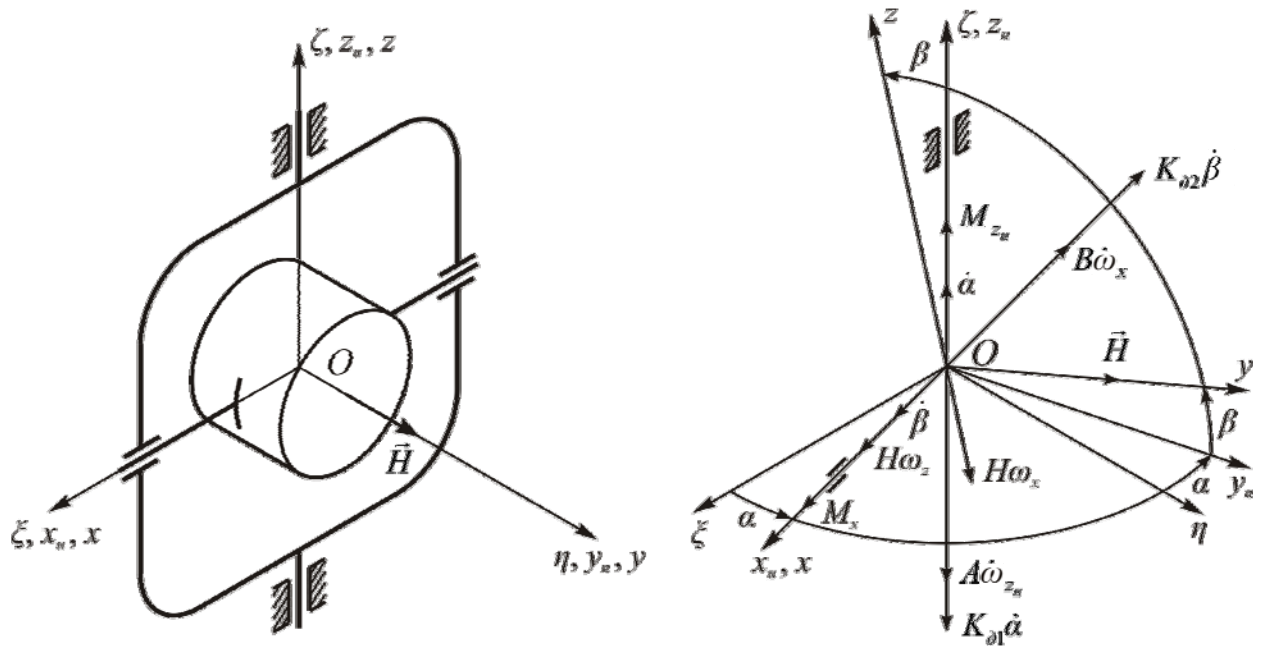


Рис. 2.21. Кинематическая схема гироскопа и кинематический чертеж

Приравнявая нулю алгебраическую сумму проекций моментов на оси внутренней и наружной рамок, получим:

$$\begin{aligned} -B\dot{\omega}_x + H\omega_z + M_x - K_{o2}\dot{\beta} &= 0; \\ -A\dot{\omega}_{zH} - H\omega_x \cos \beta - K_{o1}\dot{\alpha} + M_{zH} &= 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

После подстановки выражений для угловых скоростей уравнения (2.90) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + K_{o1}\dot{\alpha} + H\dot{\beta} \cos \beta &= M_{zH}; \\ B\ddot{\beta} + K_{o2}\dot{\beta} - H\dot{\alpha} \cos \beta &= M_x. \end{aligned}$$

Линеаризованные уравнения движения для случая, когда $M_x = M_{zH} = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha} + K_{o1}\Delta\dot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= 0; \\ B\Delta\ddot{\beta} + K_{o2}\Delta\dot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Решим уравнения (2.91) при следующих начальных условиях:

$$t = 0; \quad \Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0) = 0; \quad \Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0; \quad \Delta\dot{\beta}(0) = 0.$$

Начальные условия соответствуют случаю, когда удар нанесен по наружной рамке гироскопа, в результате чего гироскоп получил начальную скорость $\Delta\dot{\alpha}_0$.

Введем переменные $x = \Delta\dot{\alpha}$ и $y = \Delta\dot{\beta}$. Тогда уравнения (2.91) примут вид:

$$\begin{aligned} A\dot{x} + K_{o1}x + Hy \cos \beta_0 &= 0; \\ B\dot{y} + K_{o2}y - Hx \cos \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Запишем уравнения (2.92) в операторной форме

$$\begin{aligned} (Ap + K_{o1})x + Hy \cos \beta_0 &= 0; \\ (Bp + K_{o2})y - Hx \cos \beta_0 &= 0, \end{aligned} \quad (2.93)$$

где p – оператор дифференцирования.

Главный определитель системы (2.93) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} Ap + K_{\partial 1} & H \cos \beta_0 \\ -H \cos \beta_0 & Bp + K_{\partial 2} \end{vmatrix} = (Ap + K_{\partial 1})(Bp + K_{\partial 2}) + H^2 \cos^2 \beta_0$$

или

$$\Delta = ABp^2 + (AK_{\partial 2} + BK_{\partial 1})p + (H^2 \cos^2 \beta + K_{\partial 1}K_{\partial 2}).$$

Уравнение по переменной x имеет вид:

$$AB\ddot{x} + (AK_{\partial 2} + BK_{\partial 1})\dot{x} + (H^2 \cos^2 \beta + K_{\partial 1}K_{\partial 2})x = 0. \quad (2.94)$$

В гироскопах величина $K_{\partial 1}$ и $K_{\partial 2}$ такова, что $K_{\partial 1}K_{\partial 2} \ll H^2 \cos^2 \beta_0$, поэтому можно пренебречь этим произведением по сравнению с $H^2 \cos^2 \beta_0$. Уравнение (2.94) примет форму

$$\ddot{x} + 2\xi\nu\dot{x} + \nu^2x = 0, \quad (2.95)$$

где $2\xi\nu = \frac{AK_{\partial 2} + BK_{\partial 1}}{AB}$; $\xi = \frac{AK_{\partial 2} + BK_{\partial 1}}{2\nu AB}$ – относительный коэффициент демпфирования; ν – собственная частота незатухающих колебаний гироскопа (частота нутационных колебаний). Для решения уравнения (2.95) найдем корни характеристического уравнения $r^2 + 2\xi\nu r + \nu^2 = 0$. Корни комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью $r_{1,2} = -\xi\nu \pm i\omega_d$, где $\omega_d = \nu\sqrt{1 - \xi^2}$ – частота демпфированных колебаний.

Решение уравнения (2.95) имеет вид

$$x = e^{-\xi\nu t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) = \Delta\dot{\alpha}. \quad (2.96)$$

Переменную y находим из первого уравнения системы (2.92)

$$y = -\frac{A\dot{x}}{H \cos \beta_0} - \frac{K_{\partial 1}x}{H \cos \beta_0} = \Delta\dot{\beta}. \quad (2.97)$$

Тогда $\Delta\alpha = \int x dt$, $\Delta\beta = \int y dt$.

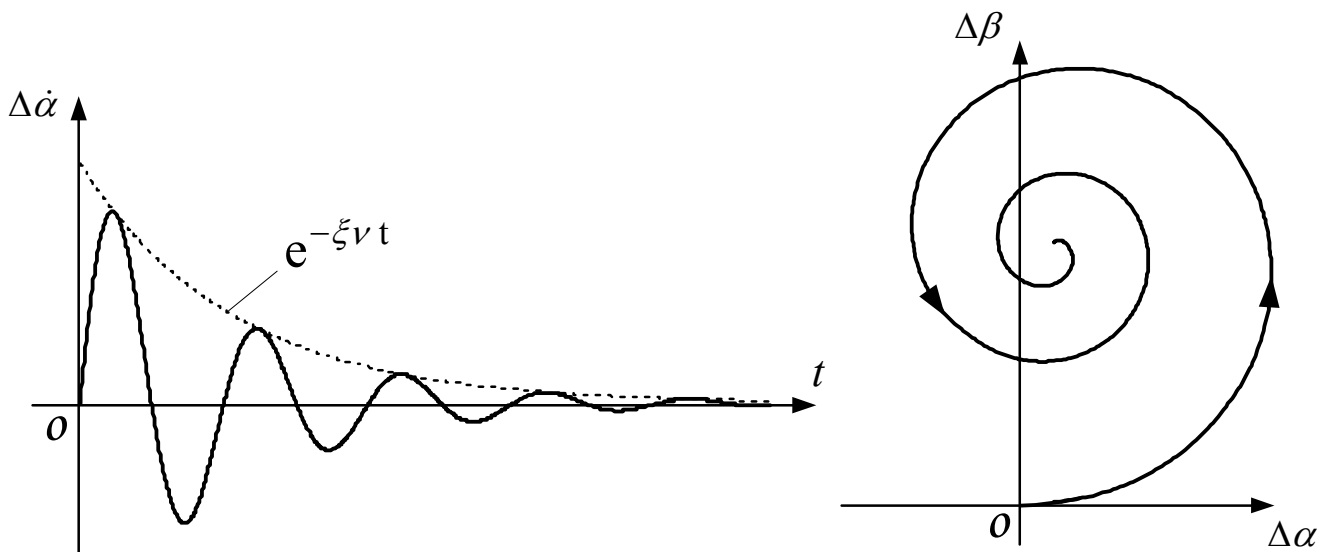


Рис. 2.22. Затухающие колебания гироскопа

Из выражений (2.96) и (2.97) видно, что с ростом t амплитуда колебаний уменьшается по экспоненте (рис. 2.22).

Таким образом, момент сил вязкого трения погашает нутационные колебания, демпфирует колебания гироскопа. Моменты сил вязкого трения $M_{mp1} = K_{\partial 1} \dot{\alpha}$ и $M_{mp2} = K_{\partial 2} \dot{\beta}$ называют также **демпфирующими моментами**, а коэффициенты $K_{\partial 1}$ и $K_{\partial 2}$ – **коэффициентами демпфирования**.

2.11.2. Влияние моментов сухого трения на движение гироскопа

Составим методом кинестатики технические уравнения движения гироскопа и учтем в математической модели гироскопа моменты сухого трения. На рисунке 2.23 изображена схема гироскопа и кинематический чертеж, на котором показаны моменты, действующие на гироскоп.

Проекции абсолютной угловой скорости на оси наружной и внутренней рамок определяется по выражениям

$$\omega_{x_H} = \omega_{y_H} = 0; \omega_{z_H} = \dot{\alpha}; \omega_x = \dot{\beta}; \omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta; \omega_z = \dot{\alpha} \cos \beta.$$

На кинематическом чертеже (см. рис. 2.23) моменты сухого трения направлены против относительных угловых скоростей и обозначены:

$M_{\beta} \text{sign} \dot{\beta}$ – момент сухого трения по оси внутренней рамки;

$M_{\alpha} \text{sign} \dot{\alpha}$ – момент сухого трения по оси наружной рамки.

Здесь: $\text{sign} \dot{\beta} = 1$ при $\dot{\beta} > 0$; $\text{sign} \dot{\beta} = -1$ при $\dot{\beta} < 0$; $\text{sign} \dot{\alpha} = 1$ при $\dot{\alpha} > 0$; $\text{sign} \dot{\alpha} = -1$ при $\dot{\alpha} < 0$.

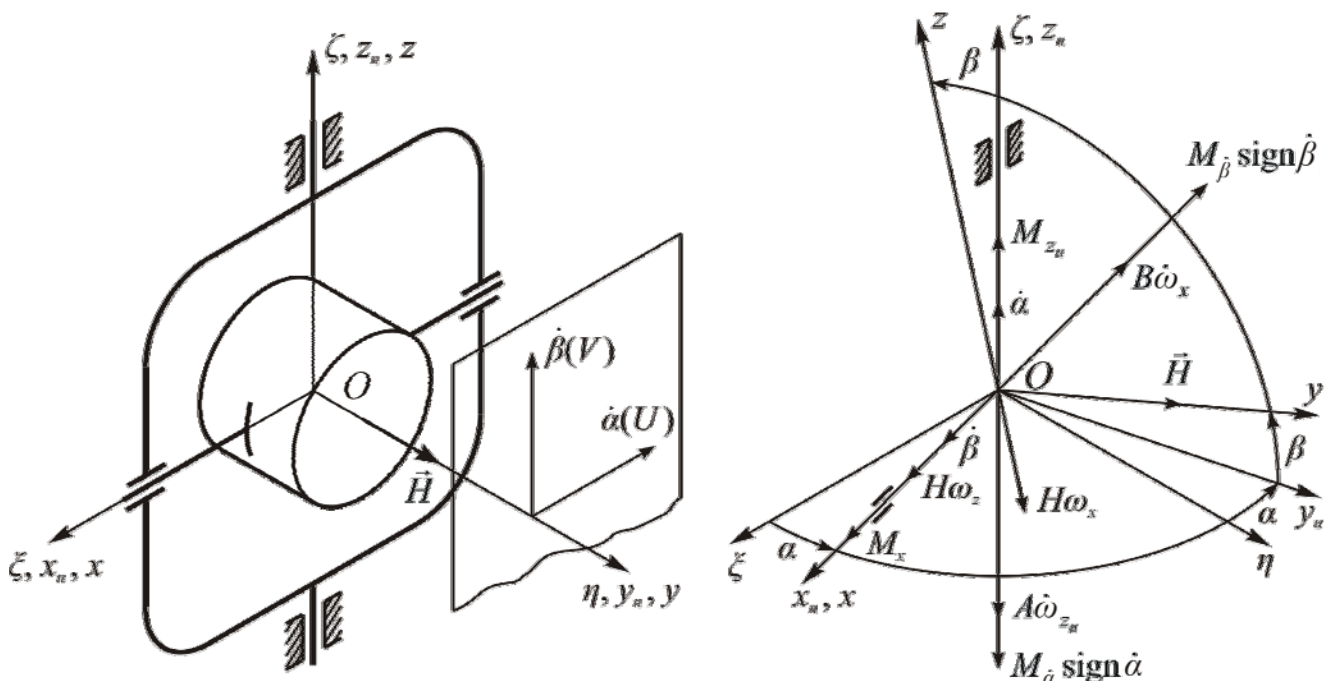


Рис. 2.23. Кинематическая схема гироскопа и кинематический чертеж

Технические уравнения движения гироскопа имеют вид

$$\begin{aligned} -A\dot{\omega}_{x_H} - H\omega_x \cos \beta - M_{\dot{\alpha}} \text{sign} \dot{\alpha} + M_{z_H} &= 0; \\ -B\dot{\omega}_x + H\omega_z - M_{\dot{\beta}} \text{sign} \dot{\beta} + M_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

или

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} \cos \beta &= -M_{\dot{\alpha}} \text{sign} \dot{\alpha} + M_{z_H}; \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} \cos \beta &= -M_{\dot{\beta}} \text{sign} \dot{\beta} + M_x. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Линеаризованные уравнения движения при $M_x = M_{z_H} = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{\alpha} + H\Delta\dot{\beta} \cos \beta_0 &= -M_{\dot{\alpha}} \text{sign} \dot{\alpha}; \\ B\Delta\ddot{\beta} - H\Delta\dot{\alpha} \cos \beta_0 &= -M_{\dot{\beta}} \text{sign} \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Введем переменные $x = \Delta\dot{\alpha}$; $y = \Delta\dot{\beta}$. Тогда

$$\begin{aligned} A\dot{x} + Hy \cos \beta_0 &= -M_{\dot{\alpha}} \text{sign} \dot{\alpha}; \\ B\dot{y} - Hx \cos \beta_0 &= -M_{\dot{\beta}} \text{sign} \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Обозначим $x\sqrt{A} = U$; $y\sqrt{B} = V$ и подставим в уравнения (2.101) вместо x и y выражения $x = U/\sqrt{A}$, $y = V/\sqrt{B}$, получим

$$\begin{aligned} A\frac{\dot{U}}{\sqrt{A}} + H\frac{V}{\sqrt{B}} \cos \beta_0 &= -M_{\dot{\alpha}} \text{sign} \dot{\alpha}; \\ B\frac{\dot{V}}{\sqrt{B}} - H\frac{U}{\sqrt{A}} \cos \beta_0 &= -M_{\dot{\beta}} \text{sign} \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Разделим первое уравнение системы (2.102) на \sqrt{A} , второе – на \sqrt{B} , получим

$$\begin{aligned} \dot{U} + \nu V &= -m_U \text{sign} \dot{\alpha}; \\ \dot{V} - \nu U &= -m_V \text{sign} \dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

где $m_U = \frac{M_{\dot{\alpha}}}{\sqrt{A}}$; и $m_V = \frac{M_{\dot{\beta}}}{\sqrt{B}}$.

Уравнения (2.103) существенно нелинейны из-за моментов сухого трения. Впервые уравнения такого типа решены Николаи Е.Л. методом изображающей точки [17].

Момент сухого трения является постоянной величиной в той области, в которой скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ (а значит и $\Delta\dot{\alpha}$ и $\Delta\dot{\beta}$) не изменяют свой знак. Пока не изменяются знаки скоростей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ (т.е. U и V) уравнения (2.103) являются линейными уравнениями с постоянной правой частью. Их решение можно находить также как и решение уравнений с постоянными внешними моментами. Необходимо только найти те моменты времени, при которых скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ изменяют знаки. При изменении знаков относительных угловых скоростей моменты трения изменяются скачком, однако ввиду инерционности гироскопа и рамок скорость их движения разрыва не имеет. Конечное значение скоростей на

одном отрезке времени является начальным на другом отрезке. «Сшивая» или «припасовывая» таким образом решения линейных уравнений можно найти решение системы (2.103). Описанную процедуру решения удобно выполнять на фазовой плоскости $(\dot{\beta}\dot{\alpha})$ или (UV) именно потому, что в пределах каждого квадранта знаки скоростей постоянны, а их изменение на противоположный знак происходит на границах квадрантов, которые называются линиями переключения (рис. 2.24).

На рисунке 2.24 фазовая плоскость разбита на четыре квадранта: I, II, III, IV.

Пусть при $t = 0$; $\Delta\dot{\alpha}(0) = \Delta\dot{\alpha}_0$, $\Delta\dot{\beta}(0) = \Delta\dot{\beta}_0$ тогда $U_0 = \Delta\dot{\alpha}_0\sqrt{A}$; $V_0 = \Delta\dot{\beta}_0\sqrt{B}$. Этим начальным условиям соответствует изображающая точка P_0 в квадранте I фазовой плоскости. В этом квадранте $U > 0$, $V > 0$ ($\Delta\dot{\beta} > 0$; $\Delta\dot{\alpha} > 0$). Уравнения (2.103) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{U} + Vv &= -m_U; \\ \dot{V} - Uv &= -m_V. \end{aligned} \quad (2.104)$$

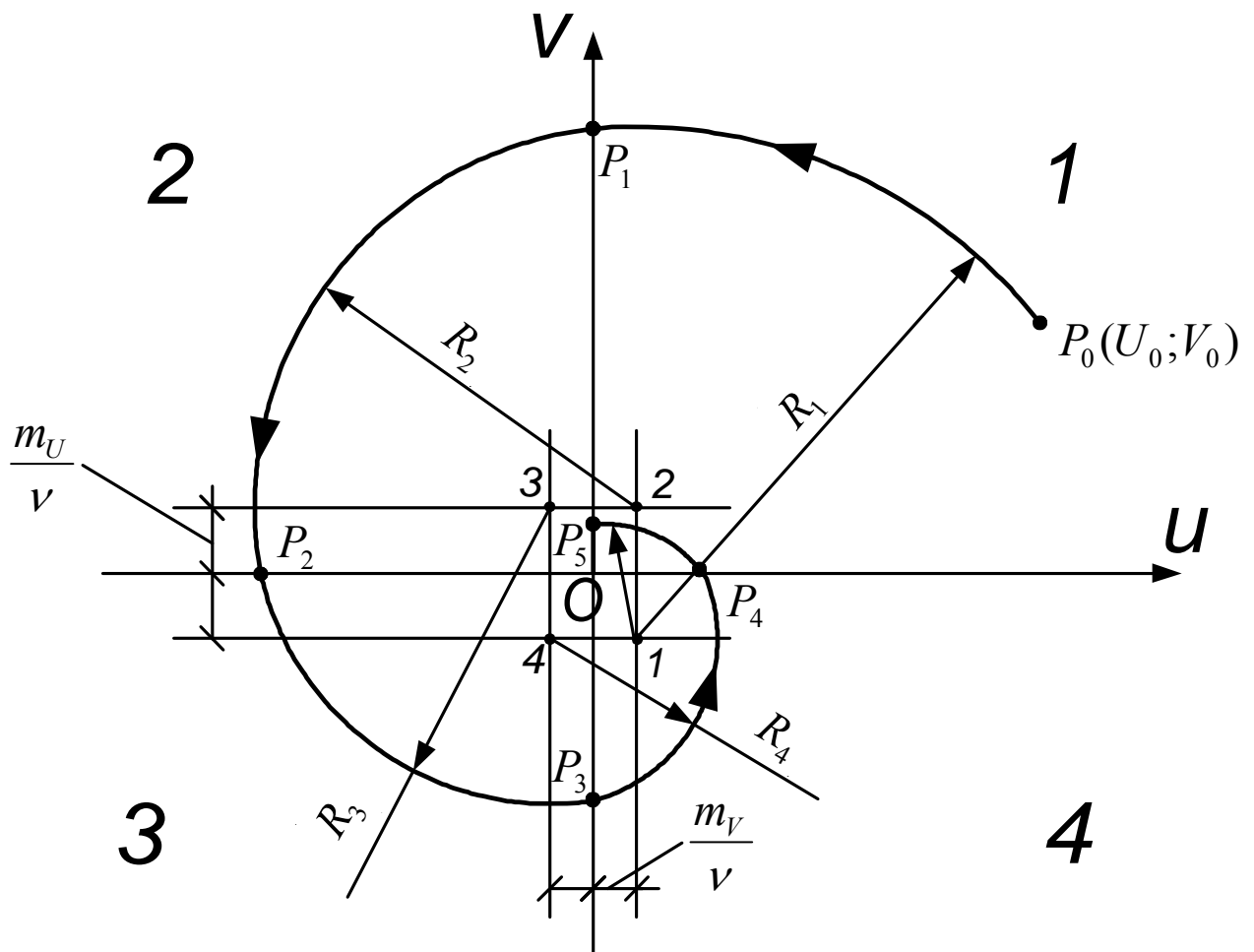


Рис. 2.24. Движение изображающей точки на фазовой плоскости

Из первого уравнения системы (2.104) находим

$$V = -\frac{\dot{U}}{\nu} - \frac{m_U}{\nu}; \quad \dot{V} = -\frac{\ddot{U}}{\nu}. \quad (2.105)$$

Подставим выражения (2.105) во второе уравнение системы (2.104), получим

$$\ddot{U} + \nu^2 U = \nu m_V. \quad (2.106)$$

Решение уравнения (2.106) запишем в виде

$$U = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + \frac{m_V}{\nu}; \quad (2.107)$$

тогда

$$V = C_1 \sin \nu t - C_2 \cos \nu t - \frac{m_U}{\nu}. \quad (2.108)$$

Полученные решения запишем в форме

$$U - \frac{m_V}{\nu} = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t; \quad (2.109)$$

$$V + \frac{m_U}{\nu} = C_1 \sin \nu t - C_2 \cos \nu t.$$

Возведем обе части выражений (2.109) в квадрат и почленно сложим, получим уравнение траектории изображающей точки в координатной форме, а именно:

$$\left(U - \frac{m_V}{\nu} \right)^2 + \left(V + \frac{m_U}{\nu} \right)^2 = R_1^2, \quad (2.110)$$

где $R_1^2 = \left(U_0 - \frac{m_V}{\nu} \right)^2 + \left(V_0 + \frac{m_U}{\nu} \right)^2$, так как при $t=0$; $U=U_0$; $V=V_0$.

Таким образом, в квадранте I изображающая точка движется по окружности радиуса R_1 с центром в точке 1 с координатами $\left(\frac{m_V}{\nu}; -\frac{m_U}{\nu} \right)$.

Направление движения изображающей точки можно установить из уравнений (2.104), если подставить начальные координаты U_0, V_0 . Тогда

$$\dot{U} = (-\nu V_0 - m_U) < 0;$$

$$\dot{V} = (\nu U_0 - m_V) > 0.$$

Это означает, что изображающая точка вращается против хода часовой стрелки, то есть так же как апекс гироскопа при нутационных колебаниях. На оси V (точка P_1) происходит смена знака координаты $U(\Delta \dot{\alpha})$, значит изменится направление момента $M_{\dot{\alpha}}$ на противоположное. Изображающая точка плавно переходит в квадрант II. В квадранте II $V > 0, U < 0$. Уравнения движения гироскопа принимают вид

$$\dot{U} + \nu V = m_U;$$

$$\dot{V} - \nu U = -m_V.$$

Решение этих уравнений определяются выражениями

$$U = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + \frac{m_V}{\nu};$$

$$V = -C_1 \sin \nu t + C_2 \cos \nu t + \frac{m_U}{\nu}.$$

Уравнение траектории изображающей точки является уравнением окружности

$$\left(U - \frac{m_V}{\nu}\right)^2 + \left(V - \frac{m_U}{\nu}\right)^2 = R_2^2.$$

Центром окружности радиуса R_2 является точка 2 с координатами $\left(\frac{m_V}{\nu}; \frac{m_U}{\nu}\right)$.

Изображающая точка по окружности радиуса R_2 приходит на ось U и плавно переходит в квадрант III.

Уравнения движения гироскопа в каждом квадранте, их решения, уравнения траекторий и координаты их центров приведены в таблице 2.1.

Таким образом, из первого квадранта изображающая точка приходит в точку P_5 и далее по оси V в начало координат O . Это означает, что колебания рамок гироскопа прекратились. Моменты сухого трения погашают нутационные колебания.

Таблица 2.1

Уравнения движения гироскопа и их решения

Квадрант, знак U, V	I, U>0 V>0	II U<0 V>0	III U<0 V<0	IV U>0 V<0
Уравнение движения	$\dot{U} + \nu V = -m_U$ $\dot{V} - \nu U = -m_V$	$\dot{U} + \nu V = m_U$ $\dot{V} - \nu U = -m_V$	$\dot{U} + \nu V = m_U$ $\dot{V} - \nu U = m_V$	$\dot{U} + \nu V = -m_U$ $\dot{V} - \nu U = m_V$
Решение уравнения	$U = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + \frac{m_V}{\nu}$ $V = C_1 \sin \nu t - C_2 \cos \nu t - \frac{m_U}{\nu}$	$U = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + \frac{m_V}{\nu}$ $V = C_1 \sin \nu t - C_2 \cos \nu t + \frac{m_U}{\nu}$	$U = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t - \frac{m_V}{\nu}$ $V = C_1 \sin \nu t - C_2 \cos \nu t + \frac{m_U}{\nu}$	$U = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t - \frac{m_V}{\nu}$ $V = C_1 \sin \nu t - C_2 \cos \nu t - \frac{m_U}{\nu}$
Уравнение траектории	$\left(U - \frac{m_V}{\nu}\right)^2 + \left(V + \frac{m_U}{\nu}\right)^2 = R_1^2$	$\left(U - \frac{m_V}{\nu}\right)^2 + \left(V - \frac{m_U}{\nu}\right)^2 = R_2^2$	$\left(U + \frac{m_V}{\nu}\right)^2 + \left(V - \frac{m_U}{\nu}\right)^2 = R_3^2$	$\left(U + \frac{m_V}{\nu}\right)^2 + \left(V + \frac{m_U}{\nu}\right)^2 = R_4^2$
Координаты центра	$\left(\frac{m_V}{\nu}; \frac{m_U}{\nu}\right)$	$\left(\frac{m_V}{\nu}; \frac{m_U}{\nu}\right)$	$\left(-\frac{m_V}{\nu}; \frac{m_U}{\nu}\right)$	$\left(-\frac{m_V}{\nu}; \frac{m_U}{\nu}\right)$

2.12. Поведение гироскопа на подвижном основании (угловое движение)

На практике часто приходится рассматривать поведение гироскопа на вращающемся основании [23]. С этой задачей встречаются при изучении движения гироскопа относительно Земли, при изменении ориентации осей гироскопа относительно объекта и т. п.

Пусть гироскоп установлен на подвижном объекте (например, самолете) так, как показано на рисунке. 2.25.

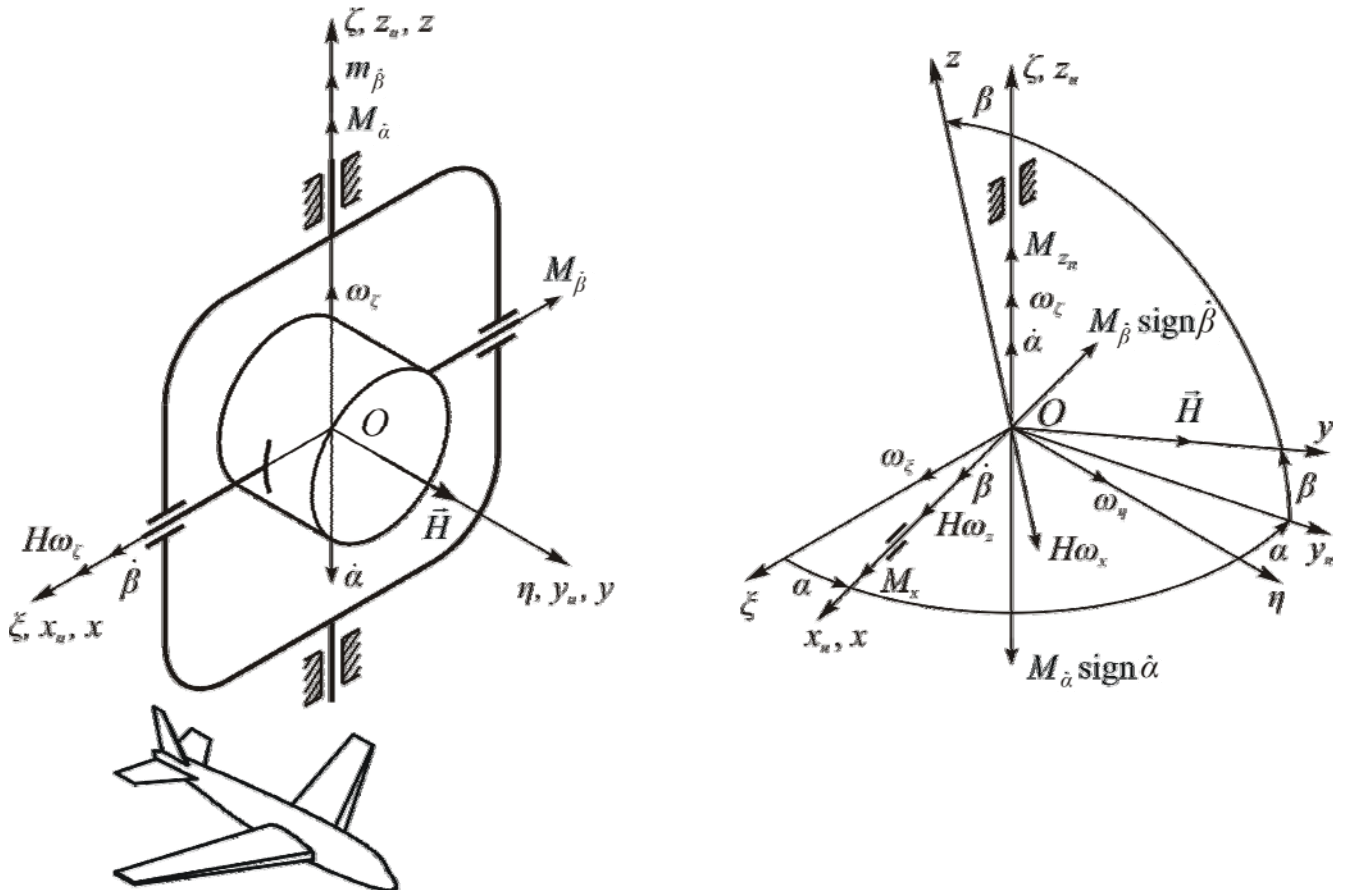


Рис. 2.25. Кинематическая схема гироскопа и кинематический чертеж

На рисунке 2.25 показаны следующие системы координат:

$O\xi\eta\zeta$ – система координат, связанная с объектом,

$Ox_ny_nz_n$ – система координат, связанная с наружной рамкой гироскопа,

$Oxyz$ – система координат, связанная с внутренней рамкой гироскопа.

На кинематическом чертеже эти системы координат рассогласованны на угол α и β . Пусть объект вращается с угловой скоростью, проекции которой на оси системы координат $O\xi\eta\zeta$ обозначены $\omega_\zeta, \omega_\eta, \omega_\xi$.

Составим прецессионные уравнения движения гироскопа методом кинетостатики. Проекции абсолютной угловой скорости на оси наружной и внутренней рамок имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_{x_n} &= \omega_\xi \cos \alpha + \omega_\eta \sin \alpha; \\ \omega_{y_n} &= \omega_\eta \cos \alpha - \omega_\xi \sin \alpha;\end{aligned}\tag{2.111}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{z_H} &= \dot{\alpha} + \omega_\zeta; \\
\omega_x &= \dot{\beta} + \omega_\xi \cos \alpha + \omega_\eta \sin \alpha; \\
\omega_y &= \omega_\eta \cos \alpha \cos \beta - \omega_\xi \sin \alpha \cos \beta + (\dot{\alpha} + \omega_\zeta) \sin \beta; \\
\omega_z &= (\dot{\alpha} + \omega_\zeta) \cos \beta + \omega_\xi \sin \alpha \sin \beta - \omega_\eta \cos \alpha \sin \beta.
\end{aligned}$$

Сумма проекций моментов на ось наружной и внутренней рамок, приравненная нулю, является уравнением движения гироскопа, а именно:

$$\begin{aligned}
-H\omega_x \cos \beta - M_\alpha \text{sign} \dot{\alpha} + M_{z_H} &= 0; \\
H\omega_z - M_\beta \text{sign} \dot{\beta} + M_x &= 0.
\end{aligned} \tag{2.112}$$

После преобразований уравнения (2.112) принимают вид

$$\begin{aligned}
(\dot{\beta} + \omega_\xi \cos \alpha + \omega_\eta \sin \alpha) \cos \beta + m_\alpha \text{sign} \dot{\alpha} - m_{z_H} &= 0; \\
(\dot{\alpha} + \omega_\zeta) \cos \beta + \omega_\xi \sin \alpha \sin \beta - \omega_\eta \cos \alpha \sin \beta + m_\beta \text{sign} \dot{\beta} - m_x &= 0,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

где $m_x = \frac{M_x}{H}$; $m_{z_H} = \frac{M_{z_H}}{H}$ – скорости прецессии, вызванные моментами M_x и M_{z_H} ;

$m_\alpha = \frac{M_\alpha}{H}$; $m_\beta = \frac{M_\beta}{H}$ – скорости прецессии, вызванные моментами сухого трения.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$; $\omega_\zeta \neq 0$; $M_\alpha = M_\beta = 0$ и $M_x = M_{z_H} = 0$.

Из уравнений (2.113) получим $\dot{\beta} = 0$; $\dot{\alpha} = -\omega_\zeta$. После интегрирования, при нулевых начальных условиях, находим

$$\beta = 0; \alpha = -\int_0^t \omega_\zeta dt. \tag{2.114}$$

Рассмотренный случай показывает, что при вращении объекта в инерциальном пространстве со скоростью ω_ζ (вокруг оси наружной рамки), гироскоп, оставаясь неподвижным в инерциальном пространстве будет регистрировать поворот объекта. По отношению к системе координат, связанной с объектом, гироскоп будет вращаться со скоростью $\dot{\alpha} = -\omega_\zeta$ и за время t вращения объекта отклонится

на угол $\alpha = -\psi(t)$, где $\psi(t) = \int_0^t \omega_\zeta dt$. Таким образом, свободный гироскоп измеряет угол поворота объекта с передаточным коэффициентом равным единице. Угол $\alpha = -\psi(t)$ для самолета является углом рыскания. Гироскоп «хранит» на борту объекта инерциальную систему координат. Для преобразования угла поворота в электрический сигнал датчик преобразования необходимо устанавливать на оси наружной рамки гироскопа.

2. Пусть $\omega_\zeta = \omega_\eta = 0$; $\omega_\xi \neq 0$; $M_\alpha = M_\beta = 0$ и $M_x = M_{z_H} = 0$.

Из уравнений (2.112) получим $\dot{\beta} = -\omega_\xi \cos \alpha$; $\dot{\alpha} = -\omega_\xi \sin \alpha \text{tg} \beta$. При $\alpha = \beta = 0$;
 $\dot{\beta} = -\omega_\xi$; $\dot{\alpha} = 0$.

После интегрирования, при нулевых начальных условиях, получим

$$\alpha = 0; \beta = -\int_0^t \omega_\xi dt = -\mathcal{G}(t).$$

Таким образом, поворот объекта относительно оси $O\xi$ регистрируется гироскопом; сигнал снимается с оси внутренней рамки. Для самолета угол $\mathcal{G}(t)$ является углом тангажа. При повороте объекта относительно оси $O\xi$ вместе с объектом будет поворачиваться наружная рамка относительно оси Ox_H , а внутренняя рамка и главная ось гироскопа будут сохранять исходное положение. Датчик преобразования угла тангажа в электрический сигнал необходимо устанавливать на оси внутренней рамки.

3. Пусть $\omega_\xi = \omega_\zeta = 0; \omega_\eta \neq 0; M_{\dot{\alpha}} = M_{\dot{\beta}} = 0$ и $M_x = M_{z_H} = 0$.

Из уравнения (2.113) получим $\dot{\beta} = -\omega_\eta \sin \alpha; \dot{\alpha} = \omega_\eta \cos \alpha \operatorname{tg} \beta$. При $\alpha = \beta = 0$ и $\dot{\beta} = 0; \dot{\alpha} = 0$. Это означает, что гироскоп не регистрирует угол поворота объекта относительно оси $O\eta$, оси совпадающей с главной осью гироскопа. Со скоростью ω_η карданов подвес вращается вместе с объектом относительно главной оси гироскопа.

4. Пусть объект вращается со скоростью $\omega_\xi = \omega_\eta = 0; \omega_\zeta \neq 0; M_{\dot{\alpha}} \neq 0; M_{\dot{\beta}} \neq 0$ и $M_x = M_{z_H} = 0$.

Рассмотрим движение гироскопа с учетом моментов сухого трения, полагая угол $\beta = 0$. Уравнения (2.113) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\beta} + m_\alpha \operatorname{sign} \dot{\alpha} &= 0; \\ \dot{\alpha} + \omega_\zeta - m_\beta \operatorname{sign} \dot{\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Когда момент сухого трения в опорах оси внутренней рамки $M_{\dot{\beta}} = 0$, относительная угловая скорость гироскопа $\dot{\alpha} = -\omega_\zeta$. Если $M_{\dot{\beta}} \neq 0$ и объект вращается со скоростью $|\omega_\zeta| \leq |m_\beta \operatorname{sign} \dot{\beta}|$, то гироскоп вращается в инерциальном пространстве вместе с объектом с угловой скоростью равной ω_ζ и вокруг оси Ox внутренней рамки карданова подвеса действует гироскопический момент $M_G = H\omega_\zeta$. Так как $|\omega_\zeta| \leq |m_\beta \operatorname{sign} \dot{\beta}|$, то $|H\omega_\zeta| \leq |M_{\dot{\beta}} \operatorname{sign} \dot{\beta}|$ и, следовательно, гироскопический момент $H\omega_\zeta$, развиваемый гироскопом, не в состоянии преодолеть момент $M_{\dot{\beta}}$ трения в подшипниках оси внутренней рамки карданова подвеса. Гироскоп как простое «негироскопическое» твердое тело вращается вместе с основанием. Гироскоп не может служить измерителем угла поворота основания, вращающегося с угловой скоростью $|\omega_\zeta| \leq |m_\beta \operatorname{sign} \dot{\beta}|$, в инерциальном пространстве.

Для того чтобы астатический гироскоп «чувствовал» вращение основания должно выполняться условие $|m_\beta| < |\omega_\zeta|$.

Существует критическая угловая скорость $\omega_{\zeta_{кр}}$, величина которой определяется равенством $\omega_{\zeta_{кр}} = m_{\dot{\beta}}$.

Если $|\omega_{\zeta}| > |m_{\dot{\beta}} \text{sign}\dot{\beta}|$, то $\dot{\alpha} = -\omega_{\zeta} + m_{\dot{\beta}} \text{sign}\dot{\beta} < 0$, $\text{sign}\dot{\alpha} = -1$. Первое уравнение системы (2.115) принимает вид $\dot{\beta} - m_{\dot{\alpha}} = 0$, откуда $\dot{\beta} = m_{\dot{\alpha}} > 0$, $\text{sign}\dot{\beta} = 1$ и $\dot{\alpha} = -\omega_{\zeta} + m_{\dot{\beta}}$.

Скорость прецессии гироскопа в инерциальном пространстве будет

$$\dot{\alpha}_{abc} = \dot{\alpha} + \omega_{\zeta} = -\omega_{\zeta} + m_{\dot{\beta}} + \omega_{\zeta} = m_{\dot{\beta}}.$$

Таким образом, при вращении основания с угловой скоростью $|\omega_{\zeta}| > |m_{\dot{\beta}} \text{sign}\dot{\beta}|$ гироскоп будет измерять угол поворота подвижного объекта относительно оси наружной рамки. Однако, измерение угла будет осуществляться с погрешностью

$$\Delta\alpha = \pm m_{\dot{\beta}} t = \pm \frac{M_{\dot{\beta}}}{H} t. \quad (2.116)$$

Момент трения в опорах оси внутренней рамки вызывает прецессию гироскопа со скоростью

$$m_{\dot{\beta}} = \frac{M_{\dot{\beta}}}{H}. \quad (2.117)$$

Погрешность измерения угла поворота объекта растет с течением времени.

Для уменьшения погрешности $\Delta\alpha$ измерения угла ψ поворота объекта в пространстве необходимо уменьшать момент трения (приближать гироскоп к свободному) и увеличивать кинетический момент H гироскопа.

При вращении объекта с угловой скоростью ω_{ζ} вокруг оси наружной рамки карданова подвеса действует момент трения $M_{\dot{\alpha}}$, который вызывает прецессию гироскопа со скоростью $\dot{\beta} = \frac{M_{\dot{\alpha}}}{H}$ вокруг оси внутренней рамки. Главная ось гироскопа приподнимается, отклоняясь от перпендикуляра к оси наружной рамки на угол β . Продолжительная прецессия гироскопа относительно оси внутренней рамки может привести при $\beta = \frac{\pi}{2}$ к совмещению главной оси гироскопа с осью наружной рамки и потере свойств гироскопа.

Рассмотренные случаи поведения гироскопа на подвижном объекте показывают, что с помощью трехстепенного гироскопа можно измерить углы поворота объекта только относительно двух осей. Для контроля углового положения объекта относительно трех осей на объекте необходимо установить два трехстепенных гироскопа. Гироскопы должны быть ориентированы осями наружной и внутренней рамок параллельно тем осям объекта, относительно которых необходимо измерять углы поворота.

Моменты трения по оси внутренней и наружной рамок вызывают прецессию гироскопа в инерциальном пространстве, что приводит к погрешности в измерении углов поворота объекта.

2.13. Поведение гироскопа с учетом статической несбалансированности

Рассмотрим гироскоп неуравновешенный, гироскоп, центр масс которого не совпадает с точкой подвеса гироскопа. Радиус-вектор $\vec{\delta}$ определяет положение центра масс относительно точки O подвеса гироскопа (рис. 2.26).

Будем полагать, что гироскоп установлен на объекте, который перемещается с ускорением \vec{a} , проекции которого на оси системы координат $O\xi\eta\zeta$, связанной с объектом обозначены a_ξ , a_η , a_ζ . Относительно осей системы координат $O\xi\eta\zeta$ объект не вращается ($\omega_\xi = \omega_\eta = \omega_\zeta = 0$).

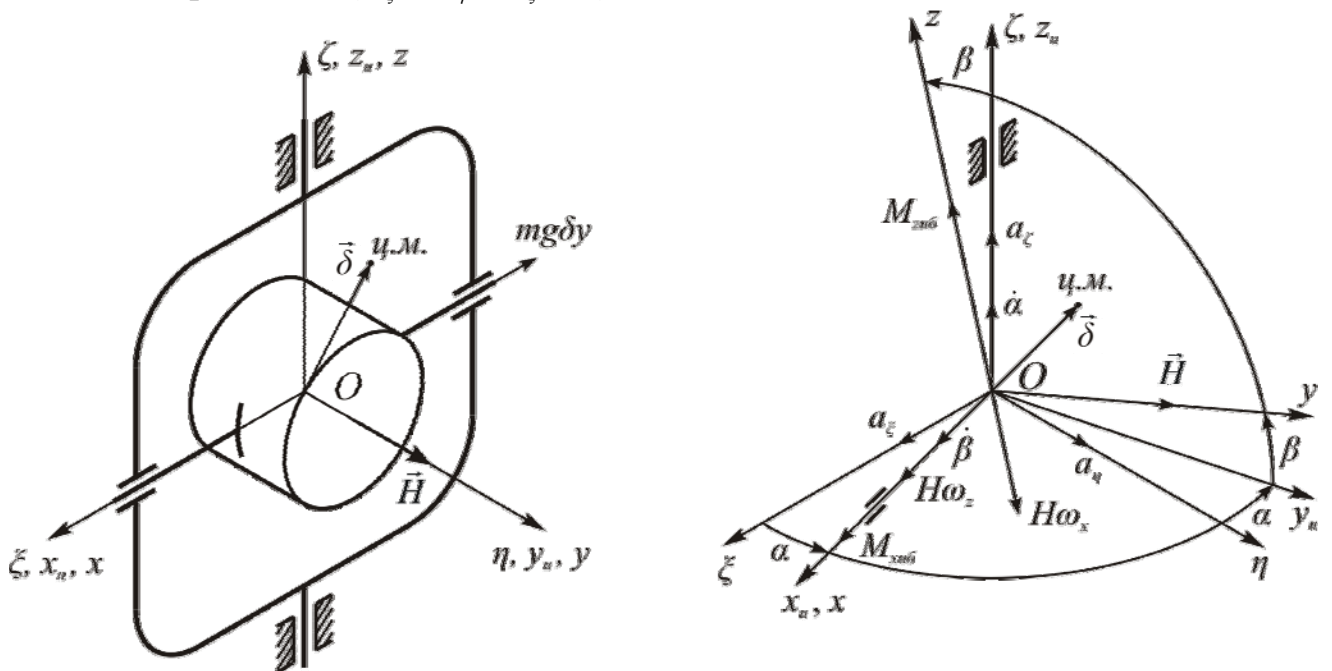


Рис. 2.26. Неуравновешенный гироскоп и кинематический чертеж

Составим прецессионные уравнения движения гироскопа. Из кинематического чертежа (рис. 2.26) находим проекции абсолютной угловой скорости на оси системы координат, связанной с внутренней рамкой

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\beta}; \\ \omega_y &= \dot{\alpha} \sin \beta; \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \cos \beta.\end{aligned}$$

Проекции ускорения движения объекта на оси, связанные с внутренней рамкой, определяются выражениями

$$\begin{aligned}a_x &= a_\xi \cos \alpha + a_\eta \sin \alpha; \\ a_y &= a_\eta \cos \alpha \cos \beta - a_\xi \sin \alpha \cos \beta + a_\zeta \sin \beta; \\ a_z &= a_\zeta \cos \beta - a_\eta \cos \alpha \sin \beta + a_\xi \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

На кинематическом чертеже покажем гироскопические моменты и моменты сил инерции, обусловленные ускоренным движением объекта. Моменты сил трения по осям подвеса учитывать не будем.

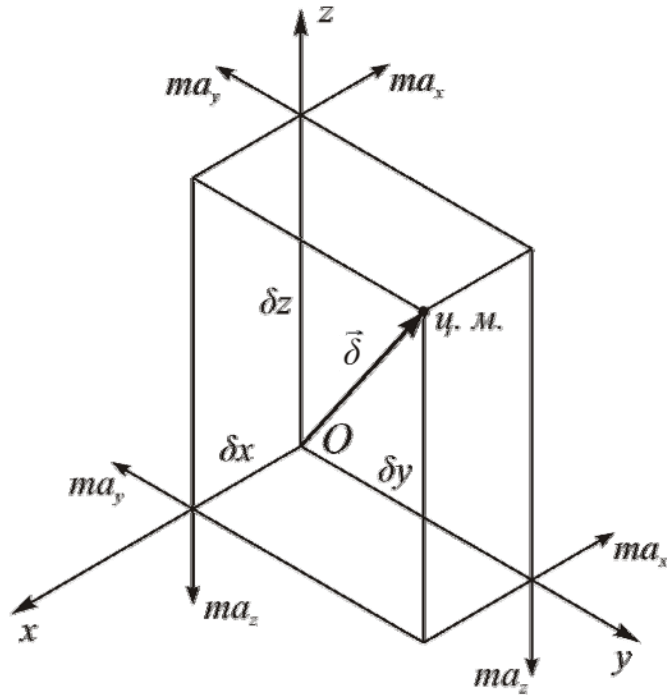


Рис. 2.27. Проекция сил инерции

Из рисунка 2.27 находим

$$M_{xнб} = m(a_y \delta_z - a_z \delta_y);$$

$$M_{zнб} = m(a_x \delta_y - a_y \delta_x),$$

где $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – координаты центра масс гироскопа.

Приравняв нулю сумму проекций гироскопических моментов и моментов несбалансированности гироскопа, получим

$$-H\omega_x \cos \beta + M_{zнб} \cos \beta = 0;$$

$$H\omega_z + M_{xнб} = 0. \quad (2.118)$$

После подстановки в уравнение (2.118) выражений для ω_x и ω_z находим

$$H\dot{\beta} - m(a_x \delta_y - a_y \delta_x) = 0;$$

$$H\dot{\alpha} \cos \beta + m(a_y \delta_z - a_z \delta_y) = 0. \quad (2.119)$$

Откуда

$$\dot{\beta} = \frac{m(a_x \delta_y - a_y \delta_x)}{H} = \dot{\beta}_{yx};$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{m(a_y \delta_z - a_z \delta_y)}{H \cos \beta} = \dot{\alpha}_{yx}. \quad (2.120)$$

Выражения (2.120) определяют угловую скорость прецессии гироскопа, порождаемую моментами сил инерции от несбалансированности гироскопа. Эту прецессию называют угловой скоростью ухода или дрейфа гироскопа, зависящую от ускорения объекта.

Момент $M_{yнб} = m(a_z \delta_x - a_x \delta_z)$ действует на гироскоп по оси, совпадающей с главной осью. Этот момент не вызывает прецессии гироскопа. Его воздействие на карданов подвес уравновешивается моментом реакций в опорах осей внутренней и наружной рамок.

Пусть гироскоп установлен на Земле на северном полюсе осью наружной рамки по вертикали места (рис. 2.28) так, что главная ось гироскопа направлена на звезду L . В силу основного свойства свободного гироскопа это направление главной оси будет сохраняться неизменным в инерциальном пространстве. В начальный момент с направлением OL совпадает линия CA – линия касательная к меридиану. Так как Земля вращается с угловой скоростью U , то линия CA , вращаясь вместе с Землей, будет отклоняться от направления OL . Наблюдатель, находящийся на Земле, будет видеть вращение главной оси гироскопа вокруг оси наружной рамки со скоростью $\dot{\alpha}_e = -U$. Это, наблюдаемое с Земли, движение гироскопа называют «кажущимся», «видимым», а скорость $\dot{\alpha}_e$ – «кажущейся» или «видимой» скоростью ухода гироскопа.

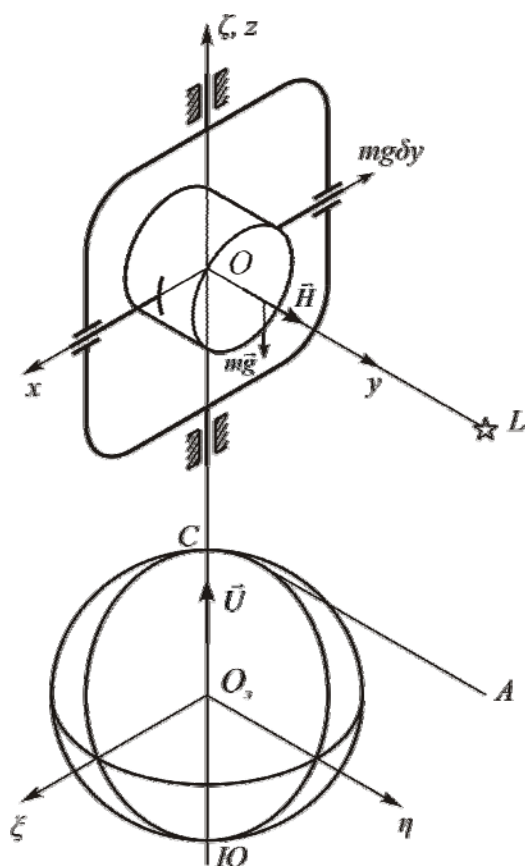


Рис. 2.28. Гироскоп на Земле

Если гироскоп неуравновешен, то сила тяжести $m\vec{g}$ создает момент относительно оси внутренней рамки $M_{xнб} = -mg\delta_y$, который вызывает прецессию гироскопа относительно оси наружной рамки с угловой скоростью $\dot{\alpha}_{yx} = \frac{mg\delta_y}{H}$. С этой скоростью главная ось Oy гироскопа будет отклоняться от линии OL . Со скоростью $\dot{\alpha}_{yx}$ гироскоп будет вращаться вокруг оси наружной рамки в инерциальном пространстве.

Прецессионные уравнения движения неуравновешенного гироскопа установленного на Земле получим из уравнений (2.113) подставив вместо m_x

угловую скорость $m_{\text{хнб}} = -\frac{mg\delta_y}{H}$ и положив $m_{\dot{\alpha}} = m_{\dot{\beta}} = m_{\dot{z}_{\text{н}}} = 0$, $\beta = 0$, $\omega_{\zeta} = \omega_{\eta} = 0$, $\omega_{\zeta} = U$. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= 0; \\ \dot{\alpha} + U - \frac{mg\delta_y}{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Из уравнений видно, что относительно оси внутренней рамки угловая скорость гироскопа равна нулю, а относительно оси наружной рамки угловая скорость $\dot{\alpha}$ определяется выражением

$$\dot{\alpha} = -U + \frac{mg\delta_y}{H}. \quad (2.122)$$

Угловая скорость $\dot{\alpha}$ это относительная скорость вращения гироскопа по отношению к базовой системе координат $O\xi\eta\zeta$, связанной с Землей.

Первое слагаемое в выражении (2.122) – это «видимый» уход гироскопа ($\dot{\alpha}_e = -U$). Это переносная угловая скорость (скорость вращения базовой системы координат). Второе слагаемое – это абсолютная угловая скорость – скорость вращения гироскопа в инерциальном пространстве. Эта скорость вызвана моментом силы тяжести из-за статической несбалансированности гироскопа.

2.14. Влияние конечной жесткости конструкции на поведение гироскопа

Ранее рассматривалось поведение гироскопа в предположении, что элементы конструкции являются абсолютно жесткими. В реальных конструкциях элементы гироскопа обладают конечной жесткостью как в направлении осей Oz и Ox , так и в направлении главной оси (Oy) гироскопа.

На рисунке 2.29 показана конструктивная схема гиросмотора. Жесткость конструкции гиросмотора в направлении осей перпендикулярных главной оси, как правило, больше жесткости вдоль главной оси. Это определяется шарикоподшипниками: они имеют в направлении главной оси меньшую жесткость, чем радиальном направлении.

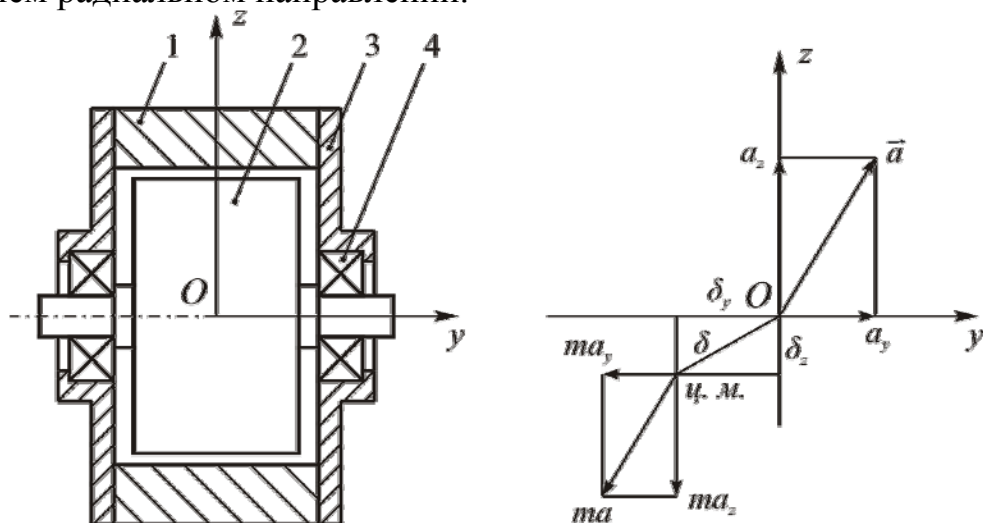


Рис. 2.29. Конструктивная схема гиросмотора и схема сил инерции, приложенных к центру масс: 1 – ротор; 2 – статор; 3 – крышка; 4 – подшипник

Пусть гиросотор трехстепенного гироскопа идеально сбалансирован, т.е. центр масс совпадает с точкой подвеса гироскопа. Обозначим коэффициенты линейной жесткости гиросотора C_z и C_y . При перемещении точки подвеса гироскопа с ускорением \vec{a} (см. рис. 2.29) в центре масс гиросотора будет приложена сила инерции $-m\vec{a}$. Под действием этой силы, из-за деформации конструктивных элементов, центр масс сместится из точки O в направлении действия силы на величину δ . Так как конструкция гиросотора имеет неодинаковые коэффициенты линейной жесткости, то по осям Oy и Oz центр масс переместится на различные величины:

$$\delta_y = \frac{ma_y}{C_y}; \delta_z = \frac{ma_z}{C_z}. \quad (2.123)$$

Такая деформация конструкции приведет к появлению момента сил инерции относительно оси внутренней рамки $M_{нж} = m(a_z\delta_y - a_y\delta_z)$.

Прецессионные уравнения движения гироскопа (2.119) в этом случае ($\alpha_x = 0$; $\delta_x = 0$; $\beta = 0$) принимают вид

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} &= 0; \\ H\dot{\alpha} + m(a_z\delta_y - a_y\delta_z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= 0; \\ \dot{\alpha} &= \frac{m(a_y\delta_z - a_z\delta_y)}{H}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Подставим в это равенство выражения (2.123), получим

$$\dot{\alpha} = \frac{ma_y a_z}{H} \left(\frac{1}{C_z} - \frac{1}{C_y} \right) = \dot{\alpha}_{ухж} \quad (2.126)$$

Эту скорость прецессии называют угловой скоростью ухода гироскопа (скоростью дрейфа) из-за неравной жесткости конструкции гироскопа ($C_z \neq C_y$). Если конструкция гироскопа равножесткая ($C_z = C_y$), то эта скорость ухода равна нулю. В этом случае деформация $\delta_z = \delta_y$ и центр масс будет располагаться на линии действия силы инерции $-m\vec{a}$, проходящей через точку подвеса O гироскопа. Момент $M_{нж}$ в этом случае равен нулю.

2.15. Модель погрешности трехстепенного гироскопа

По осям подвеса наружной и внутренней рамок в реальных конструкциях гироскопов присутствуют внешние моменты. Эти моменты нежелательны, поэтому их называют возмущающими, вредными. Чем меньше возмущающие моменты, тем трехстепенный гироскоп ближе к свободному гироскопу.

Возмущающий момент определяется по формуле

$$M_{\epsilon} = M_{тр} + M_{нб} + M_{тт} + M_{тд\gamma} + M_{тдм} + M_{нж} + M_{пр}, \quad (2.127)$$

где $M_{тр}$ – момент трения;

$M_{нб}$ – момент статической несбалансированности;

$M_{тт}$ – момент тяжения токоподводов;

$M_{тд\gamma}$ – момент тяжения датчика угла;

$M_{тдм}$ – момент тяжения датчика момента;

$M_{нж}$ – момент от неравножесткости конструкции;

$M_{пр}$ – прочие моменты.

Погрешность, вызванная возмущающим моментом M_{ϵ} относится к типу инструментальных, технологических погрешностей. Момент M_{ϵ} вызывает уход, дрейф гироскопа с угловой скоростью

$$\omega_{yx} = \omega_{оп} = \frac{M_{\epsilon}}{H} = \left| \frac{M_{тр}}{H} \right| + \left| \frac{M_{нб}}{H} \right| + \left| \frac{M_{тт}}{H} \right| + \left| \frac{M_{тд\gamma}}{H} \right| + \left| \frac{M_{тдм}}{H} \right| + \left| \frac{M_{нж}}{H} \right| + \left| \frac{M_{пр}}{H} \right|. \quad (2.128)$$

Погрешность гироскопа определяется по величине угловой скорости ухода $\omega_{yx}(\omega_{оп})$, которая определяется суммированием отдельных составляющих по абсолютной величине.

Принято разделять угловую скорость ухода на следующие составляющие

ω_0 – скорость ухода независящая от ускорения;

ω_1 – скорость ухода пропорциональная ускорению;

ω_2 – скорость ухода пропорциональная квадрату ускорения.

Скорость ω_0 порождается действием моментов, независящих от ускорения. К ним относятся моменты трения, моменты тяжения токоподводов, моменты тяжения датчиков угла и момента, возмущающие моменты от электрических и магнитных полей.

Скорость ухода ω_1 вызывается моментом пропорциональным ускорению. К таким моментам относится момент статической несбалансированности гироскопа.

Скорость ухода ω_2 вызывается действием моментов вследствие неравножесткости конструкции гироскопа.

С учетом выделенных составляющих скорость ухода ω_{yx} определяется по формуле

$$\omega_{yx} = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2, \quad (2.129)$$

где

$$\omega_0 = \left| \frac{M_{тр}}{H} \right| + \left| \frac{M_{тт}}{H} \right| + \left| \frac{M_{тд\gamma}}{H} \right| + \left| \frac{M_{тдм}}{H} \right|; \quad \omega_1 = \left| \frac{M_{нб}}{H} \right|; \quad \omega_2 = \left| \frac{M_{нж}}{H} \right|.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Виды уравнений движения гироскопа и какое движение они описывают.
2. Что такое нутация гироскопа? Формула для определения частоты нутационных колебаний.
3. Каков порядок частоты нутационных колебаний?
4. При каких условиях частота нутационных колебаний равна угловой скорости ротора?
5. От каких параметров гироскопа зависит амплитуда нутационных колебаний. Как относятся амплитуды нутационных колебаний внутренней и наружной рамок?
6. Причины ухода свободного гироскопа, обнаруженного при решении уравнений движения во втором приближении.
7. Изобразить кинематическую схему трехстепенного гироскопа, установленного на самолете так, чтобы измерялся угол крена в неограниченном диапазоне.
8. Чему равен передаточный коэффициент трехстепенного гироскопа как измерителя углов поворота объекта?
9. От чего зависит минимальная скорость вращения объекта, которую «почувствует» трехстепенный гироскоп?
10. Что является причиной погрешностей трехстепенного гироскопа как измерителя углов поворота объекта?
11. Модель погрешностей трехстепенного гироскопа.
12. Показать моменты, действующие на гироскоп при ускоренном движении точки подвеса, вызванные статической несбалансированностью гироскопа.
13. Показать, как нежесткость конструкции гироузла влияет на трехстепенный гироскоп при ускоренном движении точки подвеса гироскопа.
14. Трехстепенный гироскоп установлен на неподвижном основании осью наружной рамки по вертикали. Центр масс гироузла смещен по главной оси на величину Δl . Уход гироскопа, обусловленный этим смещением, составляет $0,1$ °/час. Найти Δl для гироскопа с кинетическим моментом $H=10$ Н·см·с массой $m=0,2$ кг.